DOI 10.15773/EKE.2018.012

UNIVERZITA KONŠTANTÍNA FILOZOFA V NITRE

FAKULTA PRÍRODNÝCH VIED

DIZERTAČNÁ PRÁCA

POČÍTAČOVÁ GRAFIKA VO VYUČOVANÍ GEOMETRIE

Doktorand: RNDr. Peter Csiba

Školiteľ: Doc. RNDr. Tibor Kmeť, CSc.

Konzultantka: RNDr. Mária Kmeťová, PhD.

Nitra

2003

Ďakujem Doc. RNDr. Tiborovi Kmeťovi, CSc. za jeho pomoc, ochotu a odborné usmerňovanie, ktoré mi poskytoval počas celého doktorandského štúdia, ako aj pri písaní dizertačnej práce.

Zároveň ďakujem RNDr. Márii Kmeťovej, PhD. za jej starostlivosť a cenné odborné rady pri realizácii a vyhodnocovaní výskumu a za konštruktívnu kritiku pri písaní dizertačnej práce.

Ďakujem riaditeľovi Gymnázia Hansa Selye v Komárne, pánovi Imrovi Ondruškovi a pánovi učiteľovi Keszeghovi, ktorí zabezpečili vhodné podmienky pre realizáciu výskumného projektu.

ÚVOD

„Úspech vzdelávacích technológií je posudzovaný podľa toho, ako dobre sú schopné napodobiť to, čo robí dobrý učiteľ."
R. E. Clark *: Confounding in educational computing research, Journal of Educational Computing Research, 1985*

Predložená dizertačná práca – *Počítačová grafika vo vyučovaní geometrie* – skúma vzťah troch vedných disciplín: geometrie, didaktiky a počítačovej grafiky z hľadiska, ako môžeme výsledky počítačovej grafiky čo najefektívnejšie využiť vo vyučovaní geometrie.

Tematika práce je veľmi aktuálna, odzrkadľuje súčasný celosvetový trend vývoja v tejto oblasti. Kvôli explozívnemu nárastu počítačovej techniky sa dostali do popredia informačné, komunikačné a kognitívne technológie, okrem iných aj v oblasti vyučovania.

K úspešnému využitiu technológií nie je postačujúce zabezpečiť ich „hmotné“ predpoklady (počítače a potrebné softvérové produkty), ale treba sa venovať aj metodológii ich použitia. Preto našim prvotným cieľom bolo preskúmať oblasť aplikovateľnosti počítačových technológií vo vyučovaní geometrie na základných a stredných školách.

Samotná práca obsahuje teoretické poznatky súvisiace s touto oblasťou. V druhej časti sú dokumentované dve výskumné projekty, v ktorých boli overované prechádzajúce teoretické poznatky v praxi.

I. TEMATIKA A KONCEPCIA PRÁCE

Predložená dizertačná práca sa zaoberá aplikovateľnosťou grafických počítačových programov vo vyučovaní geometrie na rôznych stupňoch školstva, zúžená hlavne na konštrukčnú časť geometrie.

SÚČASNÝ STAV RIEŠENIA PROBLEMATIKY

K počítačom podporovanej výučbe sú potrebné dva predpoklady: Pomocou čoho vyučovať a ako realizovať vyučovanie týmto neklasickým spôsobom.

Prvý predpoklad môžeme rozdeliť na ďalšie dva okruhy otázok:

- § Či máme dostatočné počítačové vybavenie (hardvér) ?
- § Či máme vhodne špecializované programové vybavenie (softvér) ?

Tieto otázky však spolu súvisia; programy, ktoré sme navrhli, nemajú veľmi vysoké hardvérové požiadavky. Teda z hardvérového hľadiska nie je nutné preukázať väčšie úsilie, lebo štandardne používané počítače sú k týmto softvérom v plnej miere postačujúce.

Vyhovieť druhému predpokladu je už o niečo ťažšie. Geometrické programy, ktoré sa dajú použiť vo vyučovacom procese, sa objavili ešte pred desiatimi rokmi v Západnej Európe, ale ich neustály vývoj trvá dodnes.

K nám sa tieto programy dostali so značným oneskorením a navyše aj v prítomnosti sa s nimi zaoberá len pomerne malá vrstva odborníkov – didaktikov. Preto neexistuje u nás ani stanovená metodológia počítačom podporovaného vyučovania matematiky a v rámci toho ani geometrie. Okrem niekoľkých odborných seminárov a článkov uverejnených v konferenčných zborníkoch nie je tomuto problému venovaná väčšia publikačná pozornosť, nevyšli teoretické, ani prakticky zamerané práce súhrnného charakteru.

CIELE PRÁCE

Cieľom práce a doktorandského štúdia bolo preskúmať teoretické možnosti aplikovateľnosti grafických softvérov v oblasti vyučovania geometrie, zbierať poznatky a skúsenosti súvisiace s touto tematikou a navrhnúť metódu na vyučovanie pomocou počítača.

Konkrétne ciele práce môžeme rozdeliť do dvoch okruhov:

§ **Teoretické**. Hľadať odpoveď na otázky typu: do akej miery môže aplikácia vhodných softvérových produktov osobitne (samozrejme, bez vplyvu osobnosti učiteľa) ovplyvniť motiváciu jedincov či skupín, zvýšiť (či znížiť) efektivitu vyučovania, pomáhať žiakom/študentom lepšie pochopiť učivo a geometrické súvislosti a vyvíjať ich geometrickú (aj priestorovú) predstavivosť.

§ **Praktické**. Hľadať odpoveď na otázky typu: Aké programy používať a ako ich používať? Ako uplatniť prípadné výhody a obísť nevýhodám vybraných softvérov? Vypracovať návrh metodológie a pracovný materiál na použitie jednotlivých softvérov, prichystať a zrealizovať výskumné projekty v rámci tejto tematiky. Hľadať odpovede na teoretickej časti kladených otázok, predpokladať výsledné hodnoty, javy a overovať tieto hypotézy.

PRIEBEH REALIZÁCIE CIEĽOV PRÁCE

V prvom rade bolo preskúmané, v akej forme, podobe sa u nás vyučuje geometria na základných a stredných školách, aby sme si mohli ustanoviť vhodné normy, kritériá na požadovanú aplikáciu. Z hľadiska týchto noriem a kritérií boli preskúmané rôzne typy grafických aplikácií. Na základe toho, ako a v akej miere vyhovujú týmto požiadavkám, sme vyzdvihli niekoľko softvérov, ktorým sme venovali viac času a pozornosti, vyšetrili sme ich aplikačné možnosti a charakteristiky. Vypracovali sme niekoľko konkrétnych výskumných projektov na empirické overovanie našich predpokladov.

Skúsenosti a poznatky čerpané z výskumov sú zhrnuté a obsahuje ich táto práca ako aj celú dokumentáciu jednotlivých výskumných projektov.

KONCEPCIA PRÁCE

Predložená dizertačná práca v súlade s témou obsahuje okrem tejto **tlačenej verzie** aj s ňou rovnocennú, **elektronicky spracovanú podobu**, ktorá sa nachádza na priloženom CD nosiči.

Elektronická verzia okrem samotného textu upraveného tak, aby sa v ňom dalo pohybovať s hypertextovými odkazmi, poskytuje ďalšie výhody oproti tlačenej verzie:

- k jednotlivým konštrukčným úlohám okrem statického obrázku sú pripojené aj príslušné súbory, ktoré sa dajú otvoriť s nimi asociovanými programami priamo z kompaktného disku;
- CD obsahuje aj inštalačné materiály opísaných programov resp. ich demo verzie;
- namiesto niektorých obrázkov (Cabri) sme umiestnili **aplety**, ktoré sú vo webovom prostredí také interaktívne obrázky, do ktorých sme schopní priamo zasahovať, premiestňovať ich prvky a zmeniť tvar a polohu útvarov, dokonca aj animovať vybraté elementy;
- elektronická verzia obsahuje multimediálne rozšírenie: zbierku žiackych a študentských riešení, videozáznamy nakrútené počas realizácie výskumných projektov a prílohy, ktoré nie sú obsiahnuté v samotnej práci, ale svojím charakterom sú vhodné na doplnenie práce, ako napr. v práci spomínaný pracovný materiál s názvom: *Použitie programu Cabri vo vyučovaní geometrie na základných školách* a ďalšie.

Tlačená verzia práce je členená na osem kapitol.

Prvá kapitola sa zaoberá tematikou a koncepciou práce.

Druhá kapitola skúma vzťah počítačov a geometrie, resp. vyučovania geometrie; v tretej kapitole sú zavedené interaktívne (dynamické) geometrické softvéry a opísané ich vlastnosti, špeciálne pre konkrétne softvéry, s ktorými sme sa zaoberali podrobnejšie.

Štvrtá kapitola sa zaoberá použitím interaktívnych geometrických softvérov vo vyučovaní geometrie, okrem všeobecných a teoretických poznatkov sú tu uvedené aj konkrétne príklady na aplikácie.

Piata kapitola je venovaná výskumu v tejto oblasti, obsahuje informácie o príprave dvoch výskumných projektoch a predvýskume. V nasledujúcich dvoch kapitolách sú tieto projekty dokumentované a komentované – šiesta kapitola bola venovaná výskumu pomocou programu Cabri Geometria II., ktorého sa zúčastnili žiaci (cca 14 ročné) vo forme pozorovania; siedma kapitola obsahuje popis experimentu s predtestom a posttestom pomocou programu Euklides s účasťou maturitného ročníka gymnázia.

V záverečnej kapitole sa pokúsime zhrnúť výsledky a skúsenosti čerpané z výskumu.

TECHNICKÉ PARAMETRE PRILOŽENÉHO CD NOSIČA:

Priložený CD nosič obsahuje elektronicky spracovanú (html – webová stránka) podobu dizertačnej práci. Okrem toho nachádzajú sa na ňom aj inštalácie spomínaných programov; jednotlivé obrázky sú odkazy a dajú sa nimi spúšťať konštrukcie v daných programov, resp. sú spracované ako aplety a dajú sa vyšetrované vlastnosti otestovať priamo v tomto prostredí. Ďalej obsahuje videozáznamy z vyučovania a text, resp. aj webovú implementáciu pracovného materiálu: Použitie programu Cabri vo vyučovaní geometrie na ZŠ, na ktorú sa v práci odvolávame.

K prehliadaniu elektronickej verzie práce odporúčame webový prehliadač MS Internet Explorer 5 alebo vyššie.

Myslíme si, že táto práca (rozšírená materiálmi priloženými na kompaktnom disku, resp. prílohami) by mohli slúžiť aj ako pomocný informačný materiál pre učiteľov a záujemcov o túto tematiku.

II. POČÍTAČE VO VYUČOVANÍ GEOMETRIE

II. 1. TECHNOLÓGIE VO VYUČOVANÍ

„Školstvo nemôže byť reformované implantovaním nových technológií do existujúcej štruktúry.“
Neil Postman *(vedúci katedry kultúry a komunikácie na New Yorskej univerzite,: The End of Education, 1995)*

V tejto časti práce ukážeme niekoľko aspektov problematiky. Budú to psychologické, pedagogické a do istej miery aj filozofické aspekty, ktoré skúmajú vzťah vyučovania a technológie. Kladieme si úvodnú, trochu provokatívnu otázku:

Máme používať „nové“ technológie vo vyučovaní geometrie (matematiky)?

V prvom rade mali by sme vedieť, čo chápať pod pojmom „nové“ technológie (ktoré však už nie sú až také nové!), lebo je to dosť široký pojem. V súčasnosti je často používaný odborný termín *informačné a komunikačné technológie.* V práci skúmané technológie však nemajú ani informačný (multimediálne encyklopédie, lexikóny a slovníky, Internet - www, ...), ani komunikačný (telefón, dátový prenos, e-mail, videokonferencia, ...) charakter. Sú zamerané skôr na realizáciu (vizualizáciu) myšlienok a tvoria nástroj, druhú cestu k poznávaciemu procesu. Preto ich nazveme radšej **kognitívnymi technológiami** [47]. Kognitívne technológie majú aplikáciu v (didaktike) matematike vo výpočtoch algoritmov, v demonštráciách, experimentovaní a tým aj v znovuobjavení matematických poznatkov. Na základe toho by sme sem mohli zaradiť grafické kalkulačky a s vhodnými softvérmi vybavené osobné počítače. Konkrétne v matematike takými vhodnými softvérmi môžu byť napr.: algebraické systémy typu *Maple* a *Matematika* a interaktívne (dynamické) geometrické programy, s ktorými sa zaoberá ďalšia časť práce.

Po vyjasnení pojmu technológia v tejto oblasti vrátime sa k úvodnej otázke. Obávame sa, že nemôžeme povedať na túto otázku jednoznačné, rozhodne áno. Presnejšie povedané nie **vždy**, **hneď** a **za každú cenu**!

Uvedieme niekoľko názorov na túto tému:

„Nedostatky v školstve nemôžu byť vyriešený technológiami. Hocijaké množstvo počítačov situáciu nezlepší … Môžeme uložiť všetky vedomosti na CD nosiče, môžeme dať WWW server na každú školu – nič z toho nie je zlé. Zlým sa to stane až v tom okamihu, keď si začneme myslieť, že sme spravili niečo pre vyriešenie problémov vo vzdelávaní.“

(Steven Jobs – poč. odborník, spoluzakladateľ Apple, Wired magazine, 1996)

„Technológie sú najnovším všeliekom pre školstvo … Každý teraz naskakuje do idúceho vlaku a hovorí, že počítače vyriešia všetky naše problémy. Až sa tak nestane, prebudíme sa a zistíme, že sme nenaučili základy.“

(Malkin Dare – zakladajúci prezident The Organization for Quality Education, Kanada, 1996)

„Som silne presvedčený o tom, že samotné bezplatné využívanie Internetu školami nestačí. Chceme, aby mladí ľudia aktívne pracovali s technológiami a aby to pre nich bolo úplne samozrejmé, musíme ísť o krok ďalej a zaistiť pre nich tiež bezplatné používanie telekomunikačných liniek, ktoré im sprístupnia nové zdroje vedomostí.“

(*Richard Riley – minister školstva v USA, 1994*)

Ale nemôžeme ich ani odmietnuť! Jednoducho nezabránime vývoju, nezabránime tomu, že nové, kognitívne technológie sa dostanú do vyučovacieho procesu, do škôl. Namiesto nezmyselného odporu treba toto úsilie rozumne podporiť. Je potrebné spoznať tieto technológie, aby sme ich vedeli používať, aby sme mohli ovládnuť ich ďalší smer vývoja.

Thomas Alva Edison, asi najgeniálnejšia vynálezca svojho obdobia, v roku 1922 vyslovil názor, že „kinematografie je predurčená na to, aby revolučným spôsobom zmenila náš vzdelávací systém. Behom niekoľkých rokov do značnej miery, ak nie úplne, nahradí učebnice“. Jeho prorodstvo sa nesplnilo, ale v dnešnej dobe v tvare osobného počítača máme v ruke oveľa „silnejší nástroj“ na reformovanie vzdelávacieho systému, ako jednoduchá premietačka. Dnešné počítače síce nedisponujú ešte umelou inteligenciou, ale ak zabezpečíme pre ne vhodné softvérové prostredie a nastavíme ich funkčnosť, môžeme od nich očakávať žiadané, predpokladané reakcie (môžeme ich naprogramovať na rôzne úlohy) – interaktívnu alebo dokonca aj multimediálnu komunikáciu medzi používateľom a počítačom.

„Nie je nič divného na tom, že deti majú rady multimediálne technológie. Dôvodom je hravá forma prezentácie informácií, ktorá napodobuje predškolský spôsob skúmania sveta. Deti sa učia rozprávať bez osnov či formálnych lekcií. Sociálne správanie je tiež osvojované inými cestami mimo školského vyučovania.“ Takto argumentoval a objasňoval dôvody toho, prečo sú uvedené technológie blízko mladej generácie, Seymour Papert (profesor M.I.T., žiak Piageta) v práci The Children's Machine (1993).

Na základe uvedených argumentov dostali sme sa k tomu, že mali by sme uvažovať predovšetkým nad tým, do akej miery je vhodné zasiahnuť do vyučovacieho procesu týmito modernejšími formami, kde bude ich rozumná hranica? (Nebolo by šťastné aj s týmito nástrojmi dopadnúť tak, ako sa to stalo napríklad s kalkulačkou.)

V nasledujúcom si pripomenieme a sumarizujeme niekoľko argumentov, ktoré sú za (+) alebo proti (-) zavedeniu kognitívnych technológií (KT) do vyučovania matematiky:

1) + Správne používanie KT zaručuje presnosť a spoľahlivosť získaných výsledkov, pomáha pri hľadaní nových hypotéz a vo vývoji kreativity osoby.
2) + KT podporujú jednoduchšiu prácu s aparátom vyššej matematiky, rozvoj abstraktných myšlienok a tvorivých schopností, samovzdelávanie ...

3) - Časová náročnosť KT – zavedenie novej KT trvá istý čas, čo môžeme považovať za stratu.
4) + KT nám môžu ušetriť čas (rýchlosť výpočtov), napr.: hľadanie prvočísiel, násobenie matíc vyšších rádov, atď.
5) - Finančná náročnosť KT.
6) + Oproti tomu multifunkčnosť, napr.: počítačový park neslúži iba na potreby matematiky.
7) - Nepripravenosť učiteľov matematiky, neschopnosť ovládania KT.
8) - Obava, že namiesto matematiky budeme učiť **len** ovládanie „matematických“ KT.
9) + Motivácia – súčastná mladá generácia sa zaujíma o technológiu, pre nich KT znamená výzvu, čo treba prekonať.

Okrem bodov 7 a 8 všetky protiargumenty sú kompenzované niečím (3→4, 5→6). Potrebovali by sme eliminovať korene argumentov (7, 8).

Ako vidíme, problém spočíva v osobnosti a v pripravenosti jednotlivých učiteľov matematiky. Nestačí na školách zabezpečiť vhodné KT, aktivizovať žiakov, študentov. To všetko je zbytočné, ak učiteľ nie je ochotný, alebo schopný používať tieto technológie, alebo ak kurikulá daného predmetu nedovolia takéto „výhybky“. Preto je potrebné umožniť a podporovať v tejto oblasti ďalšie vzdelávanie učiteľov, aby mali dostatočnú odvahu, pripravenosť, odborné vzdelanie a zručnosť k používaniu KT [37].

Síce podarilo sa nám pripomenúť aj niekoľko psychologických, pedagogických a kurikulárnych aspektov, ale na problematiku sme sa dívali zatiaľ skôr len z hľadiska technológií. K didaktickému aspektu sa síce ešte podrobnejšie vrátime v ďalších kapitolách práce, ale uvedené poznatky doplníme jednou myšlienkou Jane L. David (*riaditeľka výskumnej skupiny, poradce firmy Apple*, 1994), uvedieme jednu rozumnú možnosť, ako by sme mohli úspešne používať tieto technológie vo vyučovaní: „Technológiami podporované projektovo orientované vyučovanie je neustále populárnejšou metódou, pri nej sa žiaci učia prostredníctvom konkrétnej práce a učitelia pôsobia skôr len ako poradcovia a partneri, než ako didaktici.“

II. 2. ROZDELENIE GEOMETRICKÝCH PROGRAMOV

Pojem geometrických programov zavedieme ako pracovný termín na tie počítačové programy, aplety a iné aplikácie, ktoré sa používajú primárne na geometrické účely ako didaktická pomôcka na hodinách matematiky.

Takto definované geometrické programy sme rozdelili do nasledujúcich troch skupín:

- Výučbové programy;

  Sem môžeme zaradiť programy, ktoré slúžia na demonštráciu (aplety), na zavedenie nových poznatkov, na opakovanie respektívne na kontrolovanie daných tematických celkov. Komunikácia, spätná väzba medzi žiakmi/študentmi a počítačom môže nastať pri testovaní. Takéto počítačové testovanie môže uľahčiť, urýchliť prácu učiteľa (pozri napr. matematický výučbový programový balík *MatheAss*®). Ako príklad uvedieme demonštračný program na pravidelné a polopravidelné telesá *Poly*® (*Poly Pro*®) a rôzne Java aplety (napr. Cabri Java)

- Interaktívne (dynamické) geometrické softvéry;

  Pod pojmom interaktívnosti rozumieme to, že používateľ môže jednoducho zasahovať priamo do obrázku a do konštrukcie, zmeniť ju, pričom používaný softvér je zameraný na geometriu. S takýmito softvérmi môže učiteľ pripraviť ukážky na demonštračné ciele, ale dajú sa použiť aj v práci (pri hľadaní hypotéz, pri rozbore a v tvorbe konštrukcií, v diskusiách daných príkladov, atď.). Interaktivita zaručuje počas práce vysoký stupeň spätnej väzby (preddefinované geometrické vlastnosti konštrukcie, ako napr. incidencia alebo rovnobežnosť dvoch priamok sa pri zmene vstupných údajov nemenia). Tieto programy sú zamerané predovšetkým na planimetriu, ale s použitím nástrojov deskriptívnej geometrie môžeme vytvoriť aj interaktívne modely trojrozmerných konštrukcií; do istej miery podporujú aj aplikáciu analytickej geometrie. Do tejto skupiny patria programy, napr.: *Geometer's Sketchpad, Cabri Geometria II, Euklides, Cinderella*.

- Geometrické programy na analytickej báze;

  Patria sem softvéry, v ktorých zadanie všetkých vstupných údajov je buď úplne alebo do značnej miery analytické. Tieto údaje sú vizualizované, môžeme ich aj zmeniť, ale zvyčajne nie s priamymi zásahmi v obrázku (znížená interaktivita). Patria sem planimetrické, ale vo väčšej miere skôr stereometrické aplikácie. Stereometrické aplikácie používajú na zobrazenie zvyčajne nejaké premietanie (voľná rovnobežná), perspektivitu alebo axonometriu, prípadne sa dá medzi nimi prepínať. Môžeme ich používať na demonštráciu, ale môžeme ich prístupniť aj žiakom v triede na osobitnú prácu. Ako príklad by sme uviedli programy *Wingeom*, *AutoGeometer, Deskriptívní geometria.*

Toto rozdelenie je len informatívne, naším cieľom nebolo rigidné rozdelenie vhodných softvérov: môžu existovať softvéry, ktoré by sme len veľmi ťažko vedeli presne zaradiť, alebo patria do viacerých skupín.

Univerzálny recept na použitie týchto programov vo vyučovaní neexistuje. Konkrétna metóda aplikovania, samozrejme, závisí od vybratého softvéru, ale prekvapujúco v prevažnej miere skôr od požiadaviek učiva, od úrovne vedomostí a schopností žiakov/študentov a od organizačných podmienok vyučovania. K úspešnému vyučovaniu pomocou počítača však predpokladáme, že jednak vyučujúci dokonale ovláda softvér, ale s tým paralelne pozná aj didaktické zásady vyučovania predmetu a v súlade s nimi používa možnosti technológií.

Geometrické programy, okrem uvedeného členenia, by sme mohli rozdeliť aj podľa toho, akou oblasťou geometrie sa zaoberajú (planimetrické – stereometrické; euklidovská - neeuklidovská geometria; atď.).

Pretože u nás sú najrozšírenejšie osobné počítače a operačný systém Windows, budeme sa zaoberať prvotne programami s profiláciu *PC/Windows.*

V nasledujúcom sa budeme zaoberať geometrickými softvérmi trochu bližšie, lebo tie ponúkajú najvýhodnejšie predpoklady na tvorivú, kreatívnu a prehľadnú prácu.

III. INTERAKTÍVNE (DYNAMICKÉ) GEOMETRICKÉ SOFTVÉRY

„Väčšina výukových programov sa snaží riešiť problematiku, ktorú sme už dávno schopní vyriešiť bez technológií. Len zriedka robí program niečo iného … Je len veľmi málo aplikácií, ktoré sú použité vhodným spôsobom, ktoré dramaticky umocňujú myslenie detí. Dávajú im k dispozícii nové nástroje na formuláciu a riešenie problémov.“
Judah Schwartz *(profesorka, Harvard Graduate School of Education, 1997)*

Budeme sa zaoberať geometrickými softvérmi, ktoré sú charakterizované horeuvedenou vlastnosťou interaktívnosti (dynamickosti). To znamená, že pohybom, zmenou polohy vybraných objektov sa zmení aj poloha objektov, ktoré s nimi boli viazané podľa daných, preddefinovaných vzťahov. Napr. keď posunieme bod, jeden koniec úsečky, na ktorej bol vyznačený stred tejto úsečky, potom sa s ním priebežne zmení aj poloha stredu.

V pomenovaní pojmu odborná terminológia nie je jednotná. Vo väčšej miere je používaný termín dynamickej geometrie (hlavne v anglo-americkej literatúre). Keď sa nad tým hlbšie zamyslíme, zistíme, že oveľa vhodnejšie vyjadruje podstatu týchto programov pojem interaktívnosti a termín interaktívna geometria. Pojem dynamickosť poukazuje na to, že sa niečo permanentne pohybuje. V týchto programoch však je možné vytvoriť aj statické konštrukcie. Napr.: ak skonštruujeme rovnoramenný pravouhlý trojuholník s danou dĺžkou prepony, tak môžeme zmeniť polohu daných bodov, objektov a dĺžku prepony a tým celý trojuholník. Nie je to dynamika - pohyb; skôr možnosť priameho zásahu do konštrukcie – interaktívnosť. Preto pre túto vlastnosť budeme ďalej používať termín interaktívnej geometrie.

Variabilnosť konštrukcií, ktorá vyplýva z interaktívnosti týchto softvérov, nám môže pomôcť ako pri rozbore úloh, tak aj pri diskusii (vyšetrovanie špeciálnych prípadov a podobne), pričom môžeme rýchlo nastaviť aj najvhodnejšie rozloženie obrázku. Tieto softvéry sú veľmi kreatívnymi nástrojmi geometrie a vyučovania geometrie. Konštrukcia je logický reťazec aplikácií geometrických poznatkov a vedomostí, pričom program ponúka možnosť voľného experimentovania. Ak k tomuto pridáme aj počítačový dataprojektor, tak môžeme získať veľmi účinnú pomôcku vyučovania geometrie, ktorá je vhodná na rýchlu a ľahkú tvorbu precíznych a interaktívnych konštrukcií.

V geometrii je často potrebné ukázať isté vlastnosti vzájomnej polohy daných geometrických objektov, napríklad, že ťažnice (výšky, osi uhlov a strán, ...) sa pretínajú v jednom bode. Keď to zostrojíme klasicky na papieri alebo na tabuli pre "ľubovoľný" trojuholník, tak vždy dostaneme overenie iba jedného jediného prípadu, ale keď zostrojíme pomocou interaktívneho geometrického programu, tak môžeme ukázať žiakovi, že ľubovoľnou zmenou tvaru trojuholníka vždy dostaneme tri priamky prechádzajúce jedným bodom. Táto vlastnosť môže pomáhať hlavne tým žiakom, ktorí nemajú až takú vyspelú geometrickú predstavivosť.

III. 1. VÝBER VHODNÉHO SOFTVÉRU

V druhej polovici osemdesiatych rokoch minulého storočia, keď počítačová technika už bola schopná okrem číselných operácií a textu produkovať aj grafiku, objavili sa geometricky orientované grafické editory. Prvým významným produktom v tejto oblasti bol program *Cabri Gèometre* (CAhier de BRouillon Informatisè), ktorý bol predstavený v Budapešti na 6. kongrese ICME v roku 1988. O dva roky neskôr sa objavil podobný, ale vyspelejší americký program *Geometer's Sketchpad*. V roku 1995 vyšla znovu koncipovaná *Cabri Gèometre II*, ktorá v tejto oblasti drží dodnes štandard.

V súčasnosti existuje veľa takých programov. Bez nároku na úplnosť uvedieme niekoľko: *Cabri Gèometre II*, *Geometer's Sketchpad, Euklides, Euklid Dynageo, Cinderella, DrGeo, Euclidean Reality, Geup*.

Najväčšiu databázu geometrických programov tvorí Internet. Sú tu dostupné interaktívne aplety, „stiahnuteľné" **demoverzie** (ukážkové, skúšobné verzie), **shareware**-ové (vyznačujú sa tým, že v programe sú zabudované isté obmedzenia;

po registrácií sa tieto obmedzenia stratia) a **freeware**-ové (bezplatné, voľne šíriteľné) verzie. Jedným najrozsiahlejším webovým uzlom na túto tému je: www.mathsnet.net/software.

Aký softvér máme vybrať z tejto širokej palety? Vybrané programy predovšetkým by mali spĺňať didaktické ciele a požiadavky vyučovania matematiky. Teda pri výbere sme uprednostnili tie, ktoré v čo najväčšej miere vyhovujú nasledujúcim didaktickým požiadavkám:

1.) Ľahká ovládateľnosť programu.

Medzi inými: na oboznámenie žiakov/študentov so softvérom potrebujeme čas – a to závisí od zložitosti ovládania.

2.) Široká používateľnosť.

Mali by sme prezentovať také softvéry, ktoré budú pre žiakov a študentov aj v ďalšej práci úspešne použiteľné.

3.) Presnosť a prehľadnosť

Zostrojené konštrukcie, obrázky by mali byť presnými a čo najprehľadnejšími.

4.) Analógia s geometrickou podstatou.

Do akej miery sú v programe uskutočnené kroky podobné s klasickými geometrickými postupmi; do akej miery podporuje práca s programom geometrické myslenie.

Ďalšími podmienkami sú okrem iného jazyková lokalizácia a dostupnosť programu, preto sme uprednostnili legálne kúpené softvéry a voľné (freeware) verzie programov. (Kvôli neporušeniu autorských práv sme používali len legálne verzie daných softvérov.)

Podrobné popísanie všetkých týchto softvérov nebolo naším cieľom, uvedieme len popis tých, ktoré boli podrobnejšie preskúmané a boli aj prakticky, experimentálne overené v reálnych podmienkach (Cabri Geometria II, Euklides).

Poznámka:

Principiálne sa nelíšia od vybraných ani ostatné interaktívne geometrické programy.

III. 2. CABRI GEOMETRIA II®

Cabri Geometria II. je asi najrozšírenejším a najpopulárnejším interaktívnym geometrickým softvérom vo svete aj u nás.

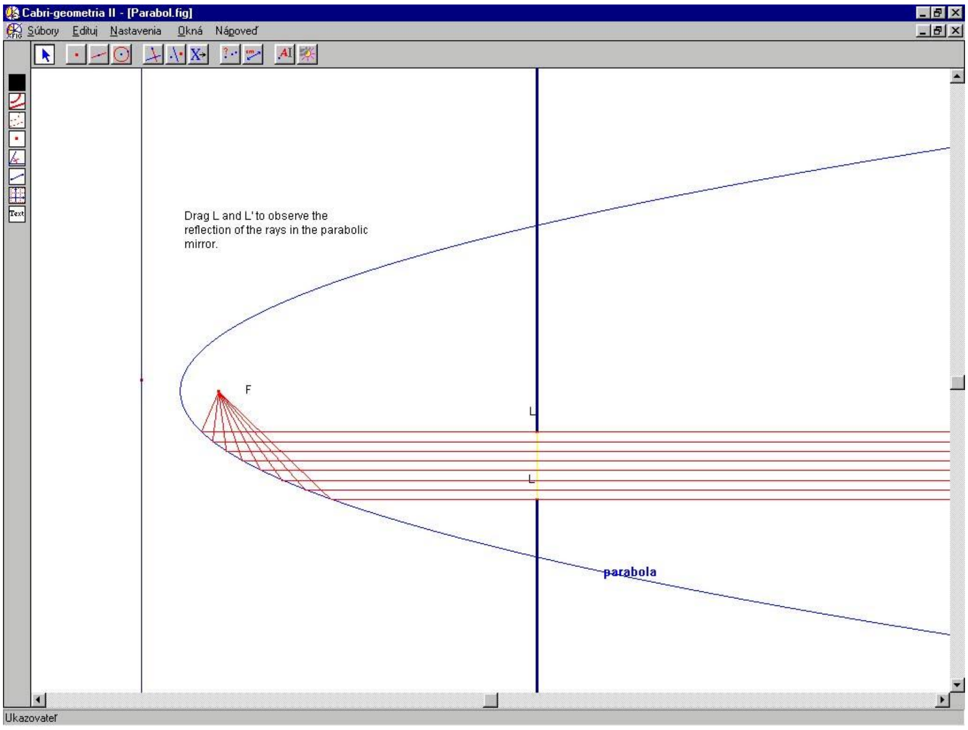
Softvér bol vyvinutý na Univerzite Josepha Fouriera v Grenobli v kolektíve pod vedením Jean-Marie Laborde. Je distribuovaný firmou Texas Instruments do celého sveta. Demoverzia programu (je časovo limitovaná, po 15 minútach treba program reštartovať, pripravené obrázky sa nedajú vytlačiť a uložiť) je voľne dostupná na Internete (napr.: http://www.ti.com/calc). Základná verzia tohto softvéru je dostupná v šiestich svetových jazykoch, ale bola lokalizovaná aj pre Slovensko. To znamená, že dajú sa nastaviť aj slovenské ovládacie prvky pomocou jazykovo-konfiguračného súboru *slovak.cgl*.

Samotný program má rôzne verzie, v závislosti od operačného systému. Existuje verzia pre DOS, pre Windows ale aj pre Macinstosh. Funkcia, vzhľad a výkonnosť softvéru je od operačného systému väčšinou nezávislá. V konštrukcie uložené programe dostanú príponu **.fig* (makrokonštrukcie **.mac*). Hotové obrázky môžeme priamo z programu vytlačiť a môžeme (síce s veľmi neefektívnym výsledkom: rastrová grafika) exportovať aj do iných aplikácií, napr. do textových editorov.

Ovládacie, konštrukčné a iné možnosti sú dosiahnuteľné cez menu. Ikony, ktoré sú umiestnené v paneli nástrojov pod menu, sú priradené ku konštrukčným a formátovacim možnostiam.

Ide o riadok, kde je niekoľko (v základnom nastavení 11) ikoniek. Keď dlhšie držíme kurzor nad danou ikonou, otvoria sa pod ním ďalšie možnosti, príkazy. Aktuálny, resp. posledný príkaz sa zobrazí na paneli nástrojov v podobe ikony.

Prvá ikona je ukazovátko, ktoré je určené na zmenu polohy objektov, na rovinné transformácie. (Pod tým sa nachádzajú ešte transformácie: otočenie, naťahovať, otočenie a naťahovať).



obr. III. 2. 1: Okno programu Cabri Geometria II.

Ďalšie tri ikony sú určené na vytvorenie bodov (bod, bod na objekte, priesečník), lineárnych objektov (priamka, úsečka, polpriamka, vektor, trojuholník, n-uholník, pravidelný n-uholník) a kvadratických objektov (kružnica, oblúk, kužeľosečka daná piatimi bodmi).

V ďalších troch ikonách sú konštrukčné kroky: množiny bodov danej vlastnosti (kolmica, rovnobežka, stred úsečky, os úsečky, os uhla, súčet vektorov, kružnica s daným polomerom, naniesť dĺžku, množina bodov, predefinovať objekt), zobrazenia (stredová a osová súmernosť, posunutie, otáčanie, rovnolahľosť, kružnicová inverzia) a makrokonštrukcie.

Ďalšie ikony sú: testovanie (kolineárnosť, rovnobežnosť, kolmosť, rovnako vzdialené?, na objekte?); meranie a analytická časť (vzdialenosť- dĺžka, obsah, smernica, uhol, súradnice a rovnice, výpočty, tabuľky); označenie a pohyb (názvy, texty, čísla, vyznačiť uhol, upevniť/uvoľniť, stopa, pohyb objektov); a nakoniec vzhľad objektov (skryť, prefarbiť, vyfarbiť, hrúbka a štýl čiar, štýl znakov, osi a mriežkové body).

V programe môžeme vytvoriť aj vlastné používateľské prostredie.

Dá sa použiť také nastavenie, aby použité atribúty boli zobrazené (ľavá časť okna). Nastavením atribútov môžeme dosiahnuť, aby všetky objekty daného typu (napr. priamky) boli nakreslené danou farbou, hrúbkou a štýlom. Samozrejme, to neznamená, že atribúty vybraných objektov nemôžeme dodatočne zmeniť. Uzavreté oblasti (napr. kružnica alebo n-uholník) môžeme vyfarbiť.

Za pracovnú oblasť tu považujeme iba rovinu (nákresňa s rozmermi 1m x 1m), ale môžeme v nej vytvoriť nielen rovinné, ale aj priestorové interaktívne obrázky, ukážky, konštrukcie s využitím vhodných vlastností perspektívnych zobrazení na rovinu [38].

Program Cabri obsahuje aj nápovedu, ktorá zobrazuje pokyny k aktuálnym možnostiam programu v osobitnom textovom okienku pod pracovnou plochou.

Program sa ovláda pomocou počítačovej myšky, resp. s klávesnicou veľmi jednoducho, je potrebné len vybrať vhodný príkaz z menu alebo ikonu z lišty nástrojov.

Uvedieme jeden konkrétny príklad:

Zostrojte opísanú kružnicu daného trojuholníka!

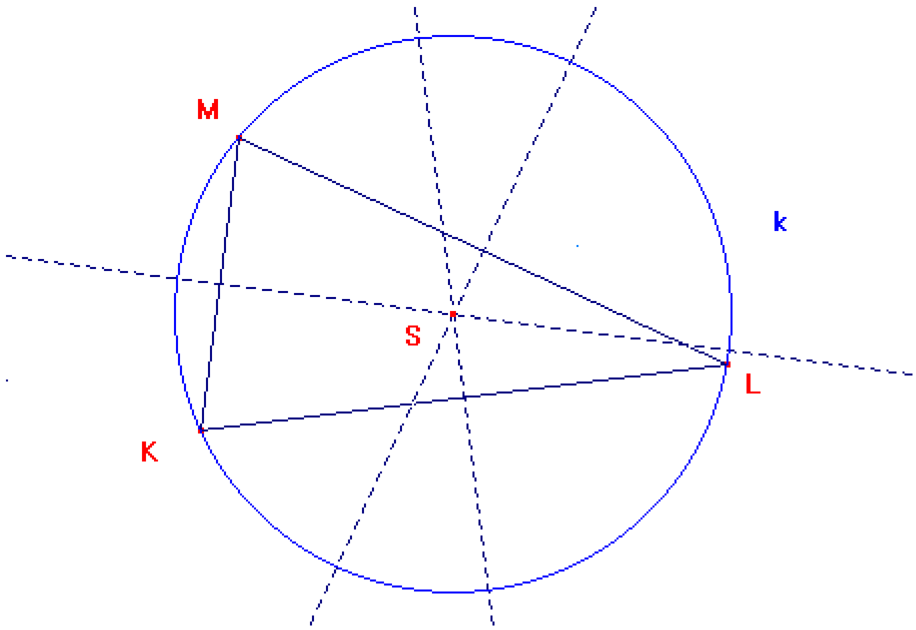
Predpokladáme, že je daný trojuholník *KLM* (možnosti Bod – Úsečka, alebo priamo Trojuholník). Kvôli jednoduchšiemu opisu označíme ich vrcholy (možnosť Pomenovanie) ako *K, L* a *M.*

Zostrojíme osi jednotlivých strán (možnosti Stred a Kolmica, alebo priamo s možnosťou Kolmica prechádzajúca stredom; pri druhej možnosti treba kliknúť na príslušnú úsečku).

Vyznačíme priesečník týchto priamok (možnosť Priesečník), môžeme ho pomenovať ako *S.*

Zostrojíme kružnicu so stredom v bode *S*, ktorá prechádza niektorým z vrcholov (vyberieme možnosť Kružnica, klikneme na bod *S* a potom napr. na vrchol *L*).

(Situáciu znázorňuje obr. III. 2. 2)



obr. III. 2. 2

Z postupu vyplýva, že táto kružnica prechádza vrcholmi *K, L M.* Takto uskutočnená konštrukcia je charakterizovaná vlastnosťou interaktívnosti, čiže so zmenou niektorých vrcholov zmeníme aj tvar trojuholníka a s ním viazane sa zmení aj kružnica, ale zostane vždy opísanou danému trojuholníku.

K programu Cabri bola vyvinutá aplikácia *CabriJava*, pomocou ktorej uložené Cabri konštrukcie (*.fig) sme schopní prezentovať aj na webe ako interaktívny Java aplet.

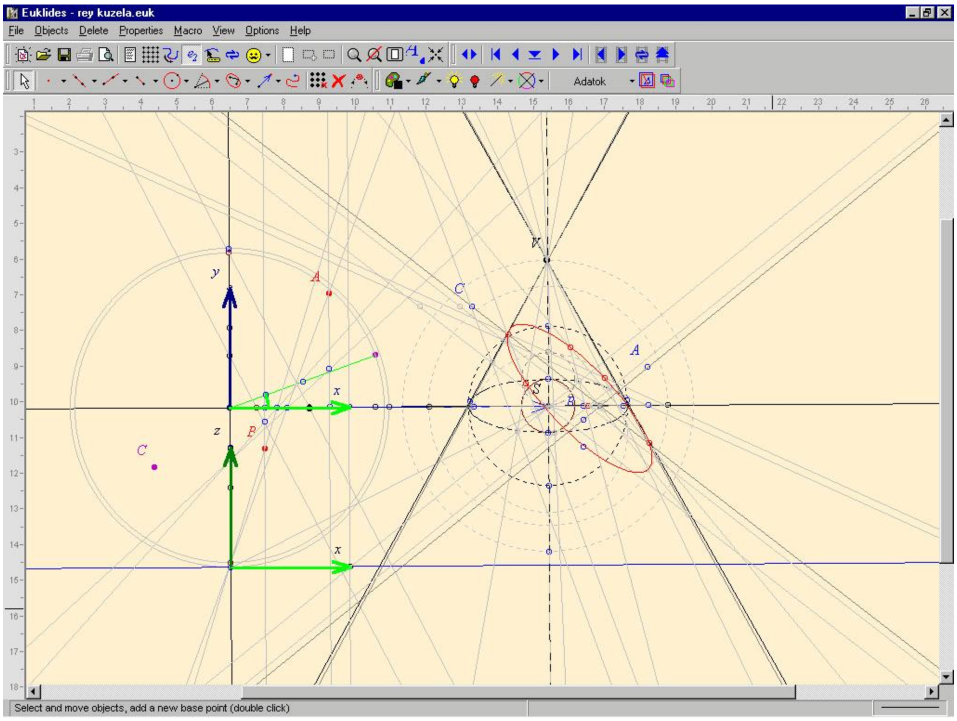
III. 3. EUKLIDES 2.4 

Euklides je interaktívny vektorovo-grafický geometrický softvér, pomocou ktorého môžeme zostrojiť, precvičovať, ale aj skúmať geometrické konštrukcie, postupy geometrických konštrukcií.

Program vyvinul stredoškolský učiteľ László István v Maďarsku v spolupráci s informatikom Simon Péterom. Aktuálna verzia Euklides 2.4 je shareware (skúšobné obdobie: 20 aktívnych dní, počet bázových bodov je limitovaný maximálne na 10). Staršia verzia softvéru (Euklides 2.02) je však oslobodená od licencie, je voľne používateľná. Táto verzia neobsahuje isté nastavenia programu a chýbajú tu možnosti animácie, tvorby makrokonštrukcií a analytická časť geometrie. Na webovej adrese www.euklides.hu sú dostupné obe verzie programu v dvoch jazykoch : anglickom a maďarskom. Zatiaľ slovenská lokalizácia neexistuje, ale prebiehajú sa rokovania o budúcej realizácií (medzi autormi programu a tejto práce).

Hotové konštrukcie sa dajú uložiť s vlastnou príponou **.euk*, ale je možné ich exportovať aj vo formáte **.wmf*, ktorý je dostupný pre bežné windowsovské aplikácie, napr. aj pre MS Word. Výhodou tohto formátu je, že uložené obrázky sú vo vektorovo-grafickej podobe, tj. máme možnosť ďalšej úpravy.

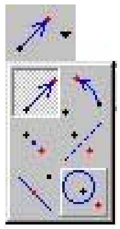
V nasledujúcom opíšeme vyspelejšiu verziu: Euklides 2.4.



obr. III. 3. 1 :   Okno programu Euklides 2.4.

Vzhľad programu: na prvý pohľad je to typická windowsovská aplikácia. Otvára sa v okienku, ovládacie prvky programu sú veľmi podobné ostatným aplikáciám Windows-u. Pod pruhom s názvom programu a súboru je vodorovne umiestnené menu. Všetky ovládacie, konštrukčné a formátovacie možnosti sú dosiahnuteľné cez menu a skoro ku každému je priradená aj ikona. Ikony sú umiestnené pod menu v paneli nástrojov. Ikony na konštrukcie sú v tzv. nástrojových skupinkách (body, priamky, úsečky, kružnice, uhly, geometrické transformácie, kužeľosečky). Tie skupiny vieme otvoriť so šípkou () pri ikone.

V skupine ikonu napr. geometrických bodových transformácií si môžeme vybrať z týchto možností:



- posunutie, otáčanie,
- obraz bodu v stredovej resp. v osovej súmernosti,
- priemet bodu a obraz bodu v kružnicovej inverzií.

Počas rysovania si môžeme voliť farbu zo šestnástich farieb a z deviatich rôznych štýlov čiar. Pomocné, nepotrebné čiary vieme skryť – čím sa stane celý výkres oveľa prehľadnejším. Hotové konštrukcie sa dajú krok za krokom prehrať – tým vlastne imitujeme, vizuálne ukážeme postup konštrukcie.

Úplne na dolnej časti okienka sa nachádza stavovo - nápovedný riadok. V pravej časti je ukázaná aktuálne používaná farba a štýl. V ľavej časti sú vypísané pomocné príkazy k danej konštrukcii, napr. keď chceme konštruovať parabolu, tak po zvolení ikony paraboly sa tu objaví príkaz: „Zadajte ohnisko paraboly...“, po zvolení bodu sa tu objaví ďalšia časť príkazu: „... zadajte určujúcu priamku!“, čiže používateľ vždy presne vie, čo má v danom kroku konštrukcie urobiť. Samotné rysovanie spravíme pomocou počítačovej myšky.

Program je zameraný hlavne na planimetriu, ale dajú sa skonštruovať aj trojrozmerné konštrukcie ako priemety do roviny. V starších verziách programu sa analytická, metrická časť tak, ako je to napr. súčasťou Cabri Geometrie zatiaľ nevyskytovala (od verzie 2.2 už obsahuje v istej forme aj meranie a možnosť makrokonštrukcií), ale oproti programu Cabri Geometria v oveľa väčšej miere podporuje geometrické myslenie v zmysle klasických euklidovských konštrukcií.

IV. POUŽITIE INTERAKTÍVNYCH GEOMETRICKÝCH SOFTVÉROV VO VYUČOVANÍ GEOMETRIE

„Študenti sú schopní lepšie zapamätovať si zážitky obsahujúci zvuk, obrázky a interaktívne prvky… Človek si pamätá asi 10% toho, čo číta, 50% toho, čo vidí, a celých 90% informácií, ktoré sú získané interaktívnymi skúsenosťami."
Brenda Pfaus *(učiteľka, špecialistka na technológie, Kanada), 1996*

Pokúsime sa ukázať na konkrétnych prípadoch, kde, kedy a ako môžeme pomocou týchto programov uľahčiť prácu učiteľa, ale aj žiaka, študenta.

Chceli by sme spomenúť, že interaktívne geometrické softvéry (*Cabri, Euklides*) analyzované v tejto práci netvoria vo vyučovaní geometrie inú a odlišnú alternatívu konštrukčného postupu. Počítačom podporovanými metódami vyučovania takisto používame (alebo môžeme použiť) tie isté kroky, postupy i metódy euklidovských konštrukcií, ktoré sú zvyčajne používané pri rysovaní s klasickými pomôckami (kružidlo, lineár).

Môžeme vyzdvihnúť nasledujúce výhody počítačom podporovaných metód oproti klasických metód:

- **<u>Presnosť konštrukcie</u>**

  Pri zložitejších konštrukciách môžu vzniknúť menšie nepresnosti, čo je vlastne priamym dôsledkom toho, že narysované čiary majú istú (minimálne cca 0,3 mm) hrúbku. Takto získané priesečníky nie sú idealizovanými bodmi, skôr malými oblasťami. Vzniknuté malé chyby, nepresnosti po viacerých krokoch môžu viesť aj k väčším nepresnostiam. V konštrukciách uskutočnených geometrickými softvérmi čiary a body síce vizuálne majú „rozmer", ale k podstatným nepresnostiam vôbec nedôjde (alebo ich vplyv je kvázi zanedbateľný).

- **<u>Interaktívnosť</u>**

  Pri klasických konštrukčných metódach dostaneme iba jeden statický obraz, kým u konštrukciách podporovaných počítačom môžeme vytvoriť interaktívne konštrukcie. Ak zmeníme vstupné dáta (napr. dĺžku troch úsečiek, ktoré tvoria strany jedného trojuholníka), automaticky sa zmení a prekreslí aj výsledná konštrukcia (trojuholník a s ním viazané objekty, ako napr. opísaná a vpísaná kružnica!). Táto vlastnosť je veľmi užitočná, povedzme, na overenie geometrických hypotéz alebo na diskusiu, na hľadanie počtu riešení, čo robí ťažkosti hlavne študentom s horšou geometrickou predstavivosťou.

- **<u>Prehľadnosť konštrukcie</u>**

  Hlavne pri zložitejších konštrukciách používame pomocné prvky: body, priamky a kružnice, ktoré v ďalšom už nie sú dôležité (presnejšie ich viditeľnosť). Potrebné sú iba ich priesečníky alebo nimi konštruované ďalšie objekty. Pri klasických metódach skúsenejší študenti kreslia tieto čiary tenšie, prerušované, alebo vyznačia iba hľadaný priesečník. Menej skúsení žiaci (napr. žiaci základných škôl) zvyčajne nerobia rozdiel medzi hlavnými a pomocnými čiarami a z tohto dôvodu sa ich konštrukcia môže stať neprehľadnou. V geometrických konštrukčných softvéroch si môžeme vybrať z niekoľkých farieb, či odtieňov, hrúbok, resp. štýlov. Môžeme to uskutočniť aj dodatočne, čo klasickými metódami možno urobiť len veľmi ťažko. Pomocné čiary, objekty, ktoré sú síce potrebné, ale nechceme, aby boli viditeľné, jednoducho skryjeme. Nepotrebné objekty vymažeme bez stopy. Vieme vhodne zvoliť aj polohu objektov (aj dodatočne), aby sa konštrukcia zmestila na zobrazovanú plochu, atď., čím sa stane konštrukcia oveľa názornejšou.

Horeuvedené poznatky poukazujú na to, že interaktívne geometrické softvéry sú vhodné na rozumnú prácu, na experimentovanie s geometrickými objektmi, čo možno použiť vo výskume, aj vo vyučovaní.

Použitie geometrického softvéru vo vyučovaní geometrie na ZŠ

Uvedieme niekoľko oblastí z učiva geometrie základných škôl [64], kde by sme mohli uplatniť výhody vyššie charakterizovaných programov. Geometrické softvéry na ZŠ môžu slúžiť hlavne na ilustráciu pri zavedení nových poznatkov, resp. na realizáciu príslušných konštrukcií a experimentáciu s nimi. Uvedieme niekoľko príkladov:

- Demonštračná, experimentálna činnosť:
  - *Uhol a jeho veľkosť, operácie s uhlami - vieme interaktívne graficky ukázať, že súčet vnútorných uhlov trojuholníka je priamy uhol.*
  - *Trojuholníky - vieme demonštrovať, že výšky (resp. ťažnice, osi uhlov, osi strán) sa pretínajú v jednom bode.*
  - *Kruh, kružnica - analýza vzájomnej polohy kružnice a priamky vzhľadom na vstupné dáta.*
- Konštrukčná činnosť:
  - *Zostrojiť trojuholník z troch daných údajov. Kedy sa dá tento trojuholník zostrojiť?*
  - *Zostrojiť štvoruholník z daných údajov.*
  - *Konštrukcie využitím geometrických miest bodov: postup konštrukcie; diskusia.*
- Možnosť geometrických transformácií:
  - *Zostrojiť obraz bodu, úsečky, atď. v stredovej, resp. osovej súmernosti.*
  - *Zistiť experimentálne, či sú určité rovinné útvary osovo resp. stredovo súmerné.*
- Ďalšia možnosť geometrických softvérov je meranie:
  - *Meranie uhlov a vzdialeností.*
  - *Riešenie (pravouhlého) trojuholníka.*
  - *Goniometria ostrého uhla.*
  - *Riešenie výpočtových geometrických úloh.*
  - *Výpočet obvodu a obsahu.*

Použitie geometrického softvéru vo vyučovaní geometrie na SŠ

Uvedieme niekoľko oblastí z učiva geometrie [65], kde by sme mohli používať geometrických softvérov:

- Planimetria

- *Zostrojenie množiny všetkých bodov, z ktorého vidíme úsečku pod daným uhlom; riešenie konštrukčných úloh pomocou tejto množiny.*
- *Odvodenie, overenie Euklidových viet a Pytagorovej vety.*
- *Zostrojenie trojuholníkov, štvoruholníkov, kružníc a iných rovinných útvarov pomocou množín bodov danej vlastnosti.*
- *Zostrojenie a experimentovanie s obrazom útvaru v zhodnom zobrazení, výsledky zloženia dvoch (alebo viac) osových súmerností.*
- *Riešenie konštrukčných úloh pomocou zhodných zobrazení.*

• Stereometria

- *Určovanie vzájomnej polohy priamok, zistenie rovnobežnosti, kolmosti priamky na rovinu, kolmosť priamok.*
- *Zobrazenie telesa, rezu telesa s rovinou a prieniku priamky a telesa vo voľnom rovnobežnom premietaní; Zostrojenie skutočnej veľkosti rezu.*
- *Vyhotovovanie sietí a modelov telies.*

Ÿ Analytická geometria

- *Operácie s vektormi (grafický súčet, rozdiel a násobok).*
- *Geometrická interpretácia skalárneho a vektorového súčinu.*
- *Ukázanie problému voľby vhodnej súradnicovej sústavy.*
- *Pochopenie súvislosti konštrukčnej (syntetickej) a analytickej metódy.*
- *Kontrolovanie výpočtov.*

V ďalších podkapitolách sa pokúsime ukázať aplikačné možnosti týchto softvérov na konkrétnych príkladoch. Ukážeme, ako môžeme softvéry použiť na overenie geometrických hypotéz. (Termín *hypotéza* používame v zmysle: používateľovi nedokázané tvrdenie, čiže napr. existencia a vlastnosti Eulerovej priamky pre toho, komu je tento poznatok ešte neznámy – je iba hypotézou.)

IV. 1. OVERENIE GEOMETRICKÝCH HYPOTÉZ POMOCOU POČÍTAČA

Uvedené programy môžeme použiť napr. počas problémového vyučovania vo vybraných oblastiach geometrických disciplín, kde žiaci a študenti potrebujú najviac kreatívnosti. Počítač im umožňuje rýchle a jednoduché experimentovanie.

Takúto vyučovaciu hodinu by sme si mohli predstaviť takto: žiaci (študenti), ktorí už ovládajú program, dostanú geometrickú úlohu (problém), ktorú sa usilujú najprv správne vymodelovať. To je fáza náčrtu. Získané obrázky môžu jednoducho zmeniť tak, aby výsledný obraz zachoval isté zákonitosti. Pomocou toho môže žiak (študent) zistiť tie súvislosti, ktoré potrebuje na úspešné vyriešenie daného problému. Môže dostať **hypotézu**, ktorá sa dá pomocou počítača ľahko overiť.

Takto získané vedomosti síce nemôžeme považovať za dôkaz v matematickom zmysle, ale myslíme si, že svoj účel spĺňa, lebo žiak lepšie porozumie úlohe. Hlavne na nižších stupňoch škôl podľa nás nie je potrebné vedecky dokazovať, oveľa užitočnejšie je vhodne overiť platnosť vyslovenej vety. Žiak takto na základe vlastných skúseností naozaj vidí a pochopí vyslovené tvrdenie.

Ďalej uvedieme niekoľko tvrdení, na ktorých sa dajú spomínané poznatky ukázať.

HYPOTÉZA 1

Nech na stranách ľubovoľného trojuholníka *ABC* ležia body *P, Q, R* tak, aby nasledujúce deliace pomery na každej strane boli rovnaké:

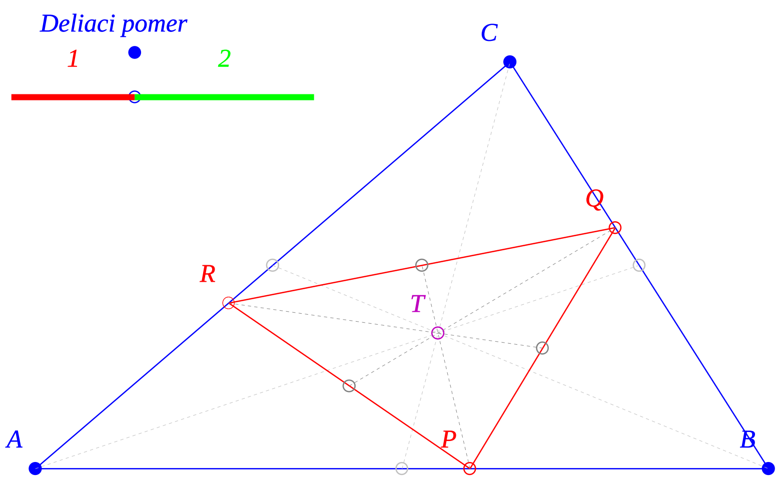
$$(ABP) = (BCQ) = (CAR) \qquad (1)$$

Potom ťažiská trojuholníka *ABC* a trojuholníka *PQR* sú totožné (obr. IV. 1. 1).

Poznámka:

Deliaci pomer je reálne číslo, definujeme ho takto [20] : Nech sú *A, B, P* tri navzájom rôzne kolineárne body. Deliaci pomer (*ABP*) bodu *P* vzhľadom na základné body deliaceho pomeru *A, B*, je daný vzťahom:

$$(ABP) = \frac{P - A}{P - B} \qquad (2)$$



obr. IV. 1. 1

<u>Overenie hypotézy 1 pomocou programu Euklides</u>

Najprv nakreslíme trojuholník *ABC*, jeho ťažnice a ťažisko *T*. Potom podľa (1) a (2) môžeme zostrojiť aj trojuholník *PQR*. Na konštrukciu sme použili program *Euklides*, kde konštrukcia bodu na priamke s daným deliacim pomerom je už zabudovanou časťou programu. To vidíme aj na obr. IV. 1. 1, kde pomer dĺžok úsečiek 1 a 2 určuje deliaci pomer. Ťažnice trojuholníka *PQR* sa pretínajú v bode *T*. Aby sme videli, že nejde o špeciálny prípad, môžeme zmeniť dĺžku úsečky 1 alebo 2, čiže deliaci pomer. Tým môžeme ukázať, že tvrdenie hypotézy platí pre ľubovoľný deliaci pomer a tým je hypotéza overená.

<u>Matematický dôkaz hypotézy 1</u>

<u>Tvrdenie</u>:

Nech na stranách ľubovoľného trojuholníka ABC ležia body P, Q, R tak, aby nasledujúce deliace pomery boli na každej strane rovnaké:

$$(ABP) = (BCQ) = (CAR)$$

Potom ťažiská trojuholníka ABC a trojuholníka PQR sú totožné.

<u>Dôkaz</u>:

Dôkaz tvrdenia môžeme urobiť vektorovo, využitím vzťahov (1) a (2).

Ťažisko môžeme vyjadriť ako aritmetický priemer súradníc vrcholov:

$$T = \frac{1}{3}\left(A + B + C\right).$$

Deliace pomery sa dajú vyjadriť aj pomocou reálneho parametra *k* ako:

$$(ABP) = (BCQ) = (CAR) = \frac{k}{k-1}$$

odkiaľ však body P, Q, R môžeme písať nasledovne:

$$P = kA + (1-k)B\,, \quad Q = kB + (1-k)C\,, \quad R = kC + (1-k)A\,. \qquad (3)$$

Sčítaním rovníc (3) a vydelením tromi však dostaneme ťažisko T′ trojuholníka PQR:

$$T' = \frac{1}{3}\left(P + Q + R\right) = \frac{1}{3}\left(kA + kB + kC + (1-k)A + (1-k)B + (1-k)C\right) = \frac{1}{3}\left(A + B + C\right). \quad (3)$$

Čiže body *T* a *T′* splývajú.

HYPOTÉZA 2

Nech sú *A, B* a *C* tri navzájom rôzne, nekolineárne body roviny E^2. Na priamkach *AB*, *BC* a *AC* definujme body *P, Q, R* a body *P′, Q′, R′* tak, aby:

$$(ABP) = (BCQ) = (CAR) = \rho \qquad (4)$$

$$(ABP') = (BCQ') = (CAR') = \frac{1}{\rho}\,, \quad (5)$$

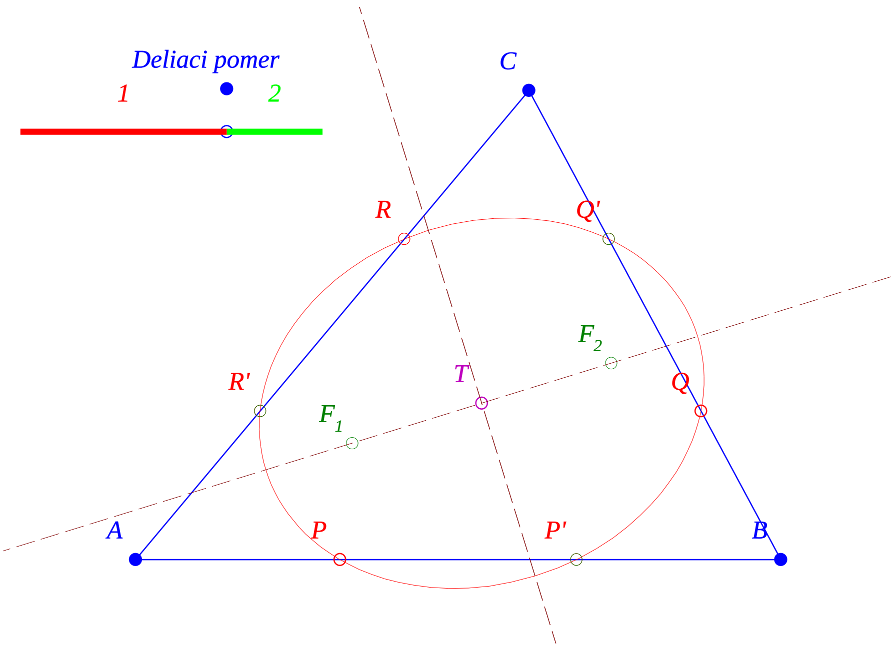
kde ρ je ľubovolné reálne číslo. Potom platí:

i. Bodmi *P, Q, R, P′, Q′, R′* prechádza práve jedna elipsa.
ii. Stredom elipsy je ťažisko trojuholníka *ABC* .
iii. Hlavné a vedľajšie osi elipsy ležia na priamkach *a* a *b*, ktoré nezávisia od ρ, len od bodov *A, B* a *C* .

Overenie hypotézy 2 pomocou programu Euklides

Najprv nakreslíme trojuholník *ABC* a jeho ťažisko *T*. Potom podľa (1) a (2) môžeme zostrojiť aj body *P, P′, Q, Q‘, R* a *R‘*. Na konštrukciu znova využijeme program *Euklides* a deliaci pomer určíme ako v prechádzajúcom príklade.

Cez body *P, P′, Q, Q‘* a *R* je program schopný nakresliť kužeľosečku. Ako to vidíme na obrázku IV. 1. 2, je to elipsa, ktorá prechádza aj bodom *R′* (i.).



obr. IV. 1. 2

Pomocou programu sa dajú priamo skonštruovať ohniská elipsy F_1, F_2. Takto vieme zostrojiť hlavnú os elipsy ako priamku prechádzajúcu ohniskami a vedľajšiu os elipsy ako os úsečky F_1F_2 a takto aj stred elipsy ako prienik osí. Keď skonštruujeme ťažiská trojuholníka *ABC*, zistíme, že stred elipsy splýva s ťažiskom trojuholníka *ABC*. Nejde o špeciálny prípad. Môžeme sa o tom presvedčiť, ak zmeníme deliaci pomer resp. tvar trojuholníka (ii.). Podobne vidíme, že zmenou deliaceho pomeru nemenia polohu priamky, na ktorých ležia hlavné, resp. vedľajšie osi (iii.). Teda, ak zmeníme deliaci pomer, mení sa „iba veľkosť" elipsy nie jej „tvar" (dostaneme homotetické elipsy).

Platnosť horeuvedenej hypotézy sa dá takto overiť pre ľubovoľný deliaci pomer. Tvrdenia hypotézy platia pre ľubovoľný deliaci pomer, čím je vlastne hypotéza overená.

Matematický dôkaz hypotézy 1

Tvrdenie: Nech *A*, *B* a *C* sú tri navzájom rôzne vlastné, nekolineárne body roviny. Na priamkach *AB*, *BC* a *AC* definujme body *P*, *Q*, *R* a body *P'*, *Q'*, *R'* tak, aby:

$$(ABP) = (BCQ) = (CAR) = \rho \qquad (4)$$

$$(ABP') = (BCQ') = (CAR') = \frac{1}{\rho}, \qquad (5)$$

kde ρ je ľubovolné reálne číslo. Potom platí:

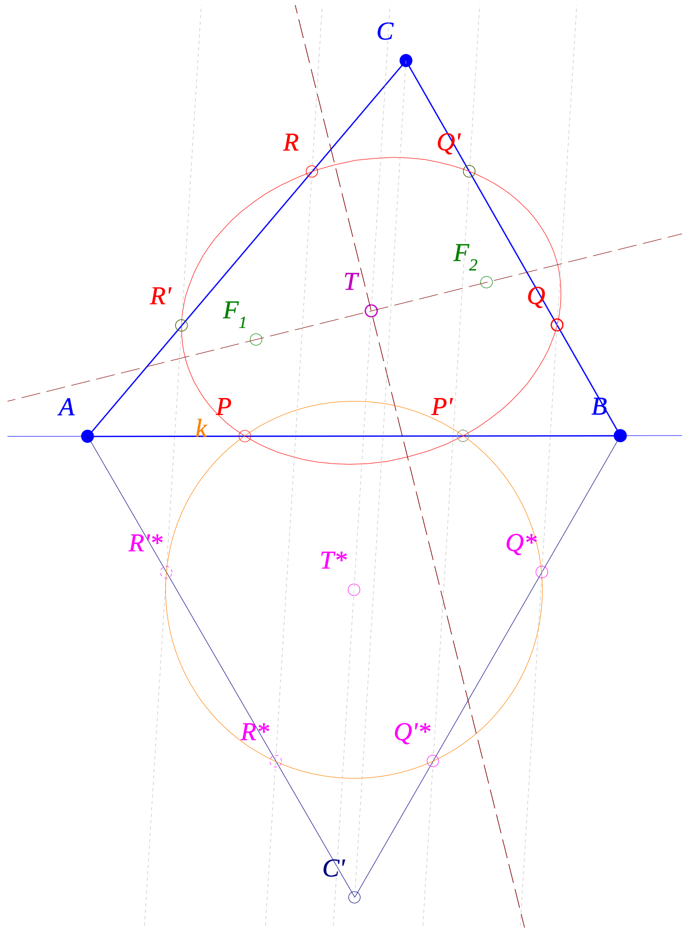
i. Bodmi P, Q, R, P', Q', R' prechádza práve jedna kužeľosečka, ktorá je elipsou.
ii. Stredom tejto elipsy je ťažisko trojuholníka ABC .
iii. Hlavné a vedľajšie osi elipsy ležia na priamkach a a b ktoré nezávisia od ρ, len od bodov A, B a C .

Dôkaz:

i. Dokážeme pomocou obrátenej Pascalovej vety, že bodmi P, Q, R, P', Q', R' prechádza jedna kužeľosečka [4]. Z predpokladov (4) a (5) vyplýva, že buď $PP'QQ'RR'$ alebo $PR'QP'RQ'$ je jednoduchý šesťuholník (žiadne tri neležia na jednej priamke), v ktorom každá dvojica protiľahlých strán je vzájomne rovnobežná, čiže ich priesečníky sú nevlastnými bodmi roviny ABC. Nevlastné body roviny ležia na jednej, nevlastnej priamke. Použitím obrátenej Pascalovej vety dostaneme, že ak priesečníky protiľahlých strán jednoduchého šesťuholníka $PP'QQ'RR'$ alebo $PR'QP'RQ'$ ležia na jednej priamke, tak tento šesťuholník je vpísaný do kužeľosečky, čiže bodmi P, Q, R, P', Q', R' prechádza kužeľosečka κ. Keďže kužeľosečka je jednoznačne daná piatimi bodmi, tak aj toto zadanie je jednoznačné.

Ďalej ukážeme, že spomínaná kužeľosečka je elipsa. Zostrojíme nad jednou stranou trojuholníka napr. nad AB pravidelný trojuholník ABC^*. Trojuholník ABC^* bude afinným obrazom trojuholníka ABC, v osovej afinite určenou osou AB a sebe zodpovedajúcou sa dvojicou $C\ C^*$. Afinné obrazy bodov P, Q, R, P', Q', R' sú body $P^*, Q^*, R^*, P'^*, Q'^*, R'^*$ (obr. IV. 1. 3).

Pričom deliace pomery (vzhľadom na invarianciu deliaceho pomeru voči afinných transformácií) bodov $P^*, Q^*, R^*, P'^*, Q'^*, R'^*$ na priamkach AB, BC^* a AC^* sa dajú vyjadriť v tvare podobnej ako (4) a (5). Trojuholník ABC^* je pravidelný, tak s využitím súmerností nie je ťažké dokázať, že bodmi $P^*, Q^*, R^*, P'^*, Q'^*, R'^*$ prechádza jedna kružnica k. (Stačí ukázať, že vrcholy šesťuholníka $P^*Q^*R^*P'^*Q'^*R'^*$ sú súmerné vzhľadom na ťažnice (osi strán) rovnostranného trojuholníka ABC* a majú od stredu opísanej kružnice trojuholníka ABC^* rovnakú vzdialenosť.) Afinný obraz tejto kružnici k v danej afinite bude elipsa κ.



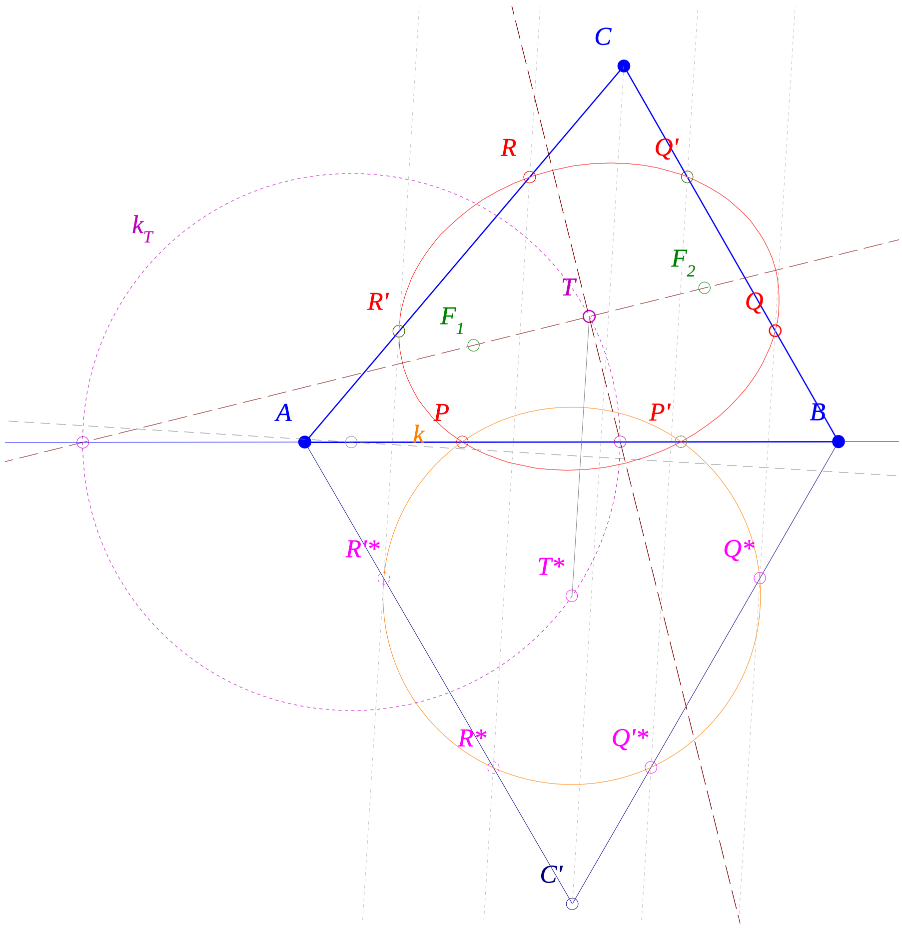
obr. IV. 1. 3

ii. Vychádzame z afinného obrazu trojuholníka. Stredom kružnice k je ťažisko T^* trojuholníka ABC^*. Ťažisko trojuholníka je afinne invariantným, a preto stredom elipsy κ, ktorá prechádza bodmi P, Q, R, P', Q', R' je ťažisko T trojuholníka ABC (obr. IV. 1. 3).

iii. Hlavnú a vedľajšiu os elipsy dostaneme konštrukčne: hľadáme tie združené (kolmé) priemery kružnice k, ktoré sa zobrazujú do kolmých združených priemerov elipsy κ [17]. Stačí nájsť Tálesovú kružnicu k_T (S,r), na ktorej ležia body T a T^* (stred kružnice k a stred elipsy κ) a jej stred S leží na osi afinity (AB):

$$AB \cap o_{TT^*} = \{S\} \text{ a takto } k_T(S, |ST|); \; AB \cap k_T = \{X, Y\},$$

čiže hlavná a vedľajšia os elipsy κ bude ležať na priamkach TX a TY a tie sú nezávislé od deliaceho pomeru ρ, závisia iba od trojuholníka ABC (obr. IV. 1. 4).



obr. IV. 1. 4

Ďalej vidíme, že aj afinita je nezávislá od ρ. Z toho vyplýva, že aj pomer dĺžok hlavnej a vedľajšej osi je od ρ nezávislý.

Poznámka

Zaujímavé sú aj špeciálne prípady tejto elipsy:

- Dá sa ukázať, že s blížením deliaceho pomeru k hodnote -1 elipsa sa približuje k vpísanej elipse, ktorá dotýka strany trojuholníka ABC v ich stredoch. Táto elipsa sa nazýva Steinerovou elipsou a vyznačuje sa s tým, že spomedzi všetkých do trojuholníka vpísaných elíps má najväčší obsah.
- Tiež sa dá ukázať, že s blížením deliaceho pomeru k hodnote 0 alebo $\pm\infty$ elipsa sa približuje k opísanej elipse, ktorá prechádza vrcholmi trojuholníka

ABC. Táto elipsa sa vyznačuje s tým, že spomedzi všetkých k trojuholníku opísaných elíps má najmenší obsah.

ÚLOHA MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY

Uvedená úloha je príklad z domáceho kola 52. ročníka matematickej olympiády (2002-2003) kategórie A (A-I-5).

Zadanie:

V rovine sú dané tri rôzne body K, L, M, ktoré v tomto poradí ležia na priamke. V tejto rovine nájdite množinu všetkých vrcholov C štvorcov ABCD takých, že bod K leží na strane AB, bod L na uhlopriečke BD a bod M na strane CD.

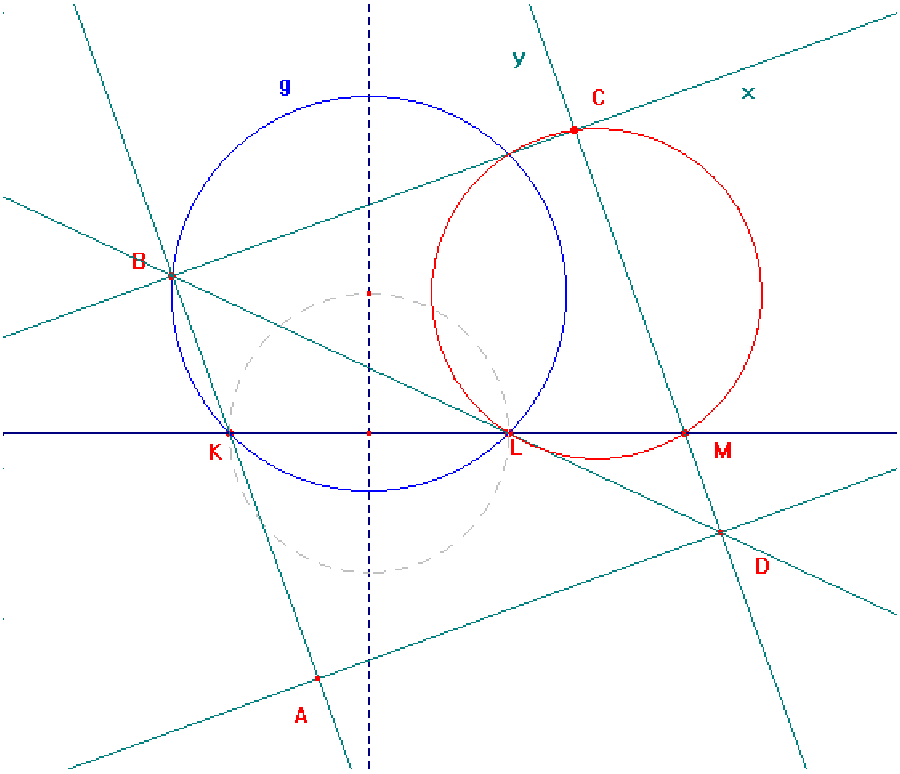
Poznámka

Isté geometrické pojmy, ako napr. výška trojuholníka alebo v našom prípade strana trojuholníka, môže znamenať aj priamku - aj úsečku. Síce stranu považujeme väčšinou za úsečku, ale v nasledujúcom kvôli symetrii a úplnosti útvarov budeme ju brať radšej ako priamku.

Hľadanie hypotézy

K riešeniu problému aj v tomto prípade je potrebné najprv nájsť rozumnú hypotézu. V takýchto prípadoch zvyčajne nakreslíme niekoľko (špeciálnych) rôznych situácií a na základe toho skúsime predpovedať nastávajúci jav. Pracovná hypotéza v tomto prípade môže, ale nemusí byť pravdivou.

Ako by sme sa mohli dopracovať k hypotéze pomocou geometrického programu? Použijeme v tomto prípade program Cabri Geometria II. Vychádzame z toho, že strana *AB* zviera s uhlopriečkou *BD* 45°-ový uhol, čiže podľa zadania úsečku *KL* vidíme z bodu *B* pod uhlom 45°. K tomu patrí množina bodov, kružnica *g* (viď obrázok IV. 1. 5). Z ľubovolného bodu „horného“ oblúku kružnice vidíme úsečku *KL* pod uhlom 45°, z „dolného“ pod uhlom 135°. To však podľa vektorovej definície uhla dvoch priamok je tiež 45°, teda ak zvolíme bod *B* na dolnom oblúku, tak priamky *AB* a *BD* uzavierajú tiež 45°-ový uhol. Na základe toho vrchol *B* nutne leží na kružnici *g* (resp. na kružnici *g*′, ktorá je osovo súmerným obrazom kružnice *g* podľa osi *KL*).



obr. IV. 1. 5

Zostrojíme teda ľubovolnú priamku *KM*, zvolíme na nej (medzi *K* a *M*) bod *L* a zostrojíme množinu (kružnicu) *g*. Na kružnici *g* zvolíme ľubovolný bod *B*. Zostrojíme priamky *BK* a *BL*. Použijeme, že susedné strany štvorca sú vzájomne kolmé a protiľahlé rovnobežné. Skonštruujeme kolmicu *x* na *BK* prechádzajúcu bodom *B* a rovnobežku *y* s priamkou *BK* cez bod *M*.

Vrchol *C* dostaneme ako priesečník priamok *x* a *y* (vrchol *D* ako priesečník *BL* a *y*; vrchol *A* s doplnením na štvorec). Zvoleným bodom *B* môžeme pohybovať po kružnici *g*, s ním sa viazane pohybujú aj ďalšie elementy (vlastnosť interaktívnosti). Stopu bodu *C* môžeme pomocou programu vykresliť (možnosť Stopu zapni/vypni). Prípadne celú situáciu animujeme, alebo necháme vykresliť samotnú množinu bodov pomocou možnosti programu Geometrické miesto bodov. To je znázornené aj na obrázku.

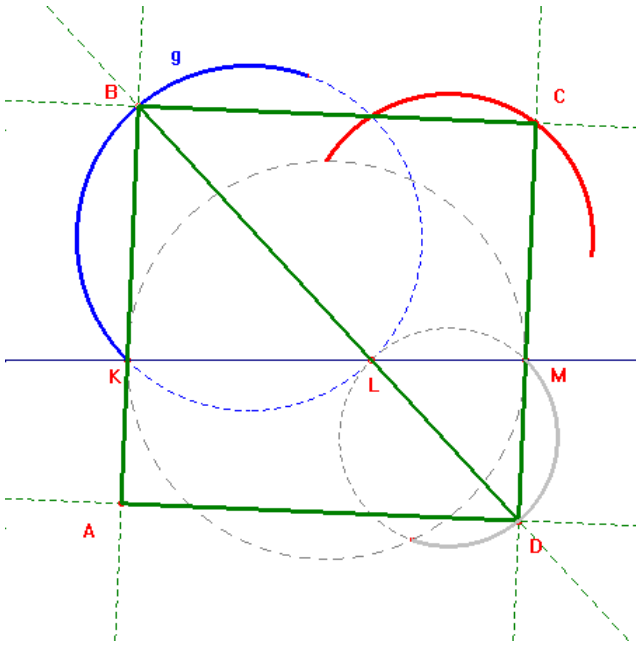
Očividne je táto množina kružnicou (na obrázku červenou odlíšená). Na základe toho oprávnene môžeme vysloviť hypotézu, že hľadanou množinou je kružnica (resp. ak vezmeme kružnicu g', dostaneme aj v druhej polrovine ako hľadanú množinu ďalšiu kružnicu, ktorá je osovo súmerná s nájdeným riešením).

Interaktívnou zmenou by sme mohli premiestniť aj určujúce prvky úlohy (body K, L a M) a presvedčiť sa o tom, že pri ľubovolnej polohe týchto prvkov, ktoré sa vyhovujú zadaniu, dostávame takú množinu – kružnicu.

Myslíme si, že takto nájdená hypotéza je dostatočne silná na to, aby sme mohli hľadať jej dôkaz a použité geometrické poznatky a postupy pomôžu aj k nájdeniu dôkazu.

Poznámka

Keby sme považovali strany trojuholníka za úsečku, a nie za priamku, namiesto celej kružnice (celých kružníc) by sme dostali len oblúk (oblúky), ako je to znázornené aj na vedľajšom obrázku (obr. IV. 1. 6).



obr. IV. 1. 6

Na základe horeuvedených môžeme vysloviť tvrdenie v tvare vety, a následne to dokázať matematicky:

Veta

Nech v rovine sú dané tri rôzne body K, L, M, ktoré v tomto poradí ležia na priamke. Množina všetkých vrcholov C štvorcov $ABCD$ takých, že bod K leží na priamke AB, bod L na priamke BD a bod M na priamke CD je kružnica.

Dôkaz

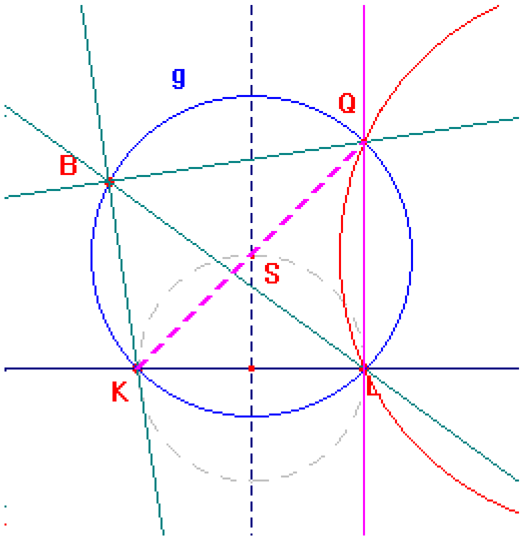
Uvažujeme o prípad, v ktorom body K, L, M fixujeme.

Vychádzame z podobných predpokladov ako pri konštrukčnej overovaní: bod B nutne leží na kružnici g.

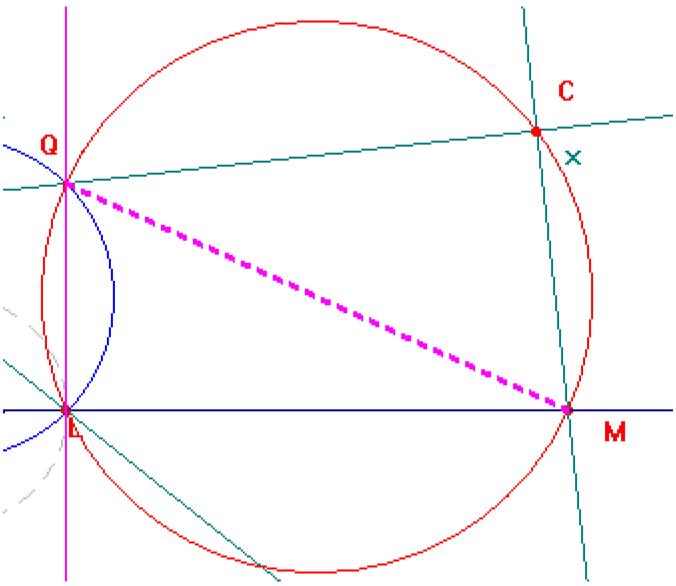
Doplníme obrázok s kolmicou v bode L na priamku KM (obr. IV. 1. 7). Tá pretne kružnicu V bode Q. Preto KQ je priemerom kružnice g a kružnica g je Tálesovou kružnicou nad priemerom KQ.

Pritom ΔKLQ je ešte aj rovnoramenným (uhol KLQ = 45° kvôli vlastnostiam kružnice g). Z toho: $|KL| = |KB|$.

Keďže bod B je ľubovolným bodom kružnice g a priamka BC musí byť kolmou na BK, tak priamka BC nutne prechádza bodom Q.



obr. IV. 1. 7



obr. IV. 1. 8

Priamka BC má prechádzať pevným bodom Q, priamka CD má prechádzať pevným bodom M, pričom sú na seba aj kolmé (štvorec). Teda bod C musí nutne ležať na Tálesovej kružnici nad priemerom MQ.

Keďže body M a Q sú pevnými bodmi, tak hľadaná množina všetkých vrcholov C je pevná kružnica.

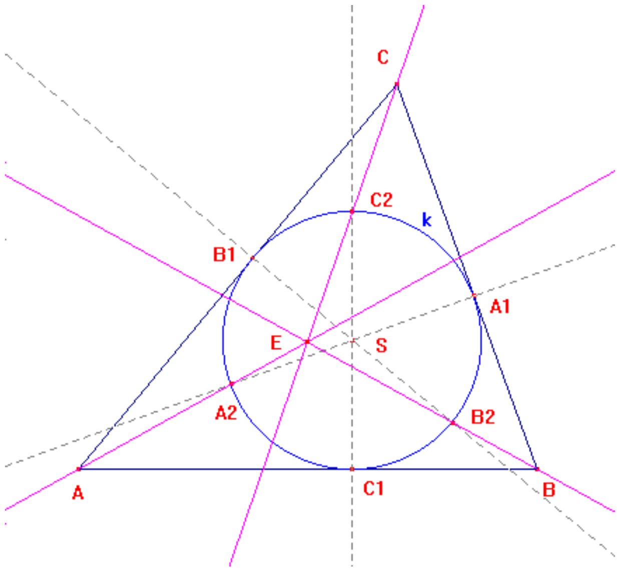
V nasledujúcich uvedieme ďalšie geometrické tvrdenia, ktorých platnosť môžeme overiť pomocou geometrických programov.

IV. 2. ZOVŠEOBECNENIE TVRDENIA O EXISTENCII EXETEROVHO BODU

Veta 1

Nech je daný trojuholník *ABC* a jeho vpísaná kružnica *k*. Stredovo súmerné obrazy dotykových bodov vpísanej kružnice so stranami trojuholníka A_1, B_1, C_1 ($A_1 \in BC, B_1 \in AC, C_1 \in AB$) podľa stredu vpísanej kružnice *S* označíme ako A_2, B_2, C_2 ($SA_1 \cap k = \{A_1, A_2\}$, $SB_1 \cap k = \{B_1, B_2\}$, $SC_1 \cap k = \{C_1, C_2\}$).

Potom platí, že priamky AA_2, BB_2, CC_2 prechádzajú jedným bodom, ktorá sa nazýva Exeterovým bodom (*E*). [13]



obr. IV. 2. 1

Počítačové overenie

Konštrukciu uskutočníme podľa vety 1. Premiestňovaním vrcholov trojuholníka zmeníme tvar trojuholníka a vidíme, že priamky AA_2, BB_2, CC_2 naozaj a vždy prechádzajú jedným bodom.

Dôkaz tejto vety neuvedieme, nakoľko zo zovšeobecnenia vyplýva aj jej dôkaz.

Pri hľadaní všeobecnejšieho tvrdenia vychádzame z toho, že v uvedenej vete body A_2, B_2, C_2 sme dostávali tak, že sme vyznačili „ďalšie“ priesečníky priamok SA_1, SB_1, SC_1 s kružnicou *k*. Základná otázka hypotézy znie takto: čo sa stane, ak namiesto špeciálneho bodu *S* zvolíme ľubovolný bod roviny (*P*) a body A_2, B_2, C_2

určíme ako „ďalšie" priesečníky priamok PA_1, PB_1, PC_1 s kružnicou k ? Ukázalo sa, že pri tých podmienkach platí podobné tvrdenie:

Veta 2

Nech je daný trojuholník ABC, jeho vpísaná kružnica k a v rovine trojuholníka bod P. Dotykové body vpísanej kružnice so stranami trojuholníka označíme ako A_1, B_1, C_1 ($A_1 \in BC, B_1 \in AC, C_1 \in AB$). Ďalšie priesečníky priamok PA_1, PB_1, PC_1 s kružnicou k označíme A_2, B_2, C_2

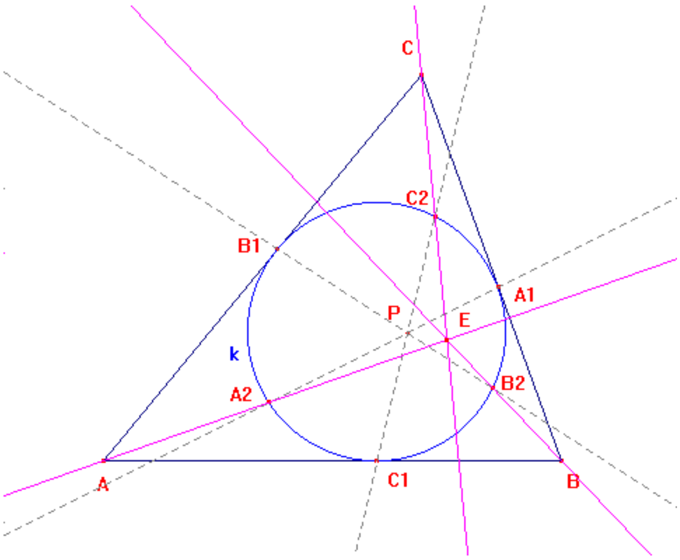
($PA_1 \cap k = \{A_1, A_2\}$, $PB_1 \cap k = \{B_1, B_2\}$, $SC_1 \cap k = \{C_1, C_2\}$).

Potom platí, že priamky AA_2, BB_2, CC_2 prechádzajú jedným bodom (E) [26].

Poznámka

„Ďalší" priesečník priamky s kružnicou chápeme v takom zmysle:

Bod A_1 je bodom kružnice, preto má priamka PA_1 s kružnicou k aspoň jeden spoločný bod. Ak majú dvoch priesečníkov, tak druhým priesečníkom (nie A_1) je bod A_2. V prípade, že priamka PA_1 kružnicu dotýka, bod A_2 je, samozrejme, totožný bodom A_1.



obr. IV. 2. 2

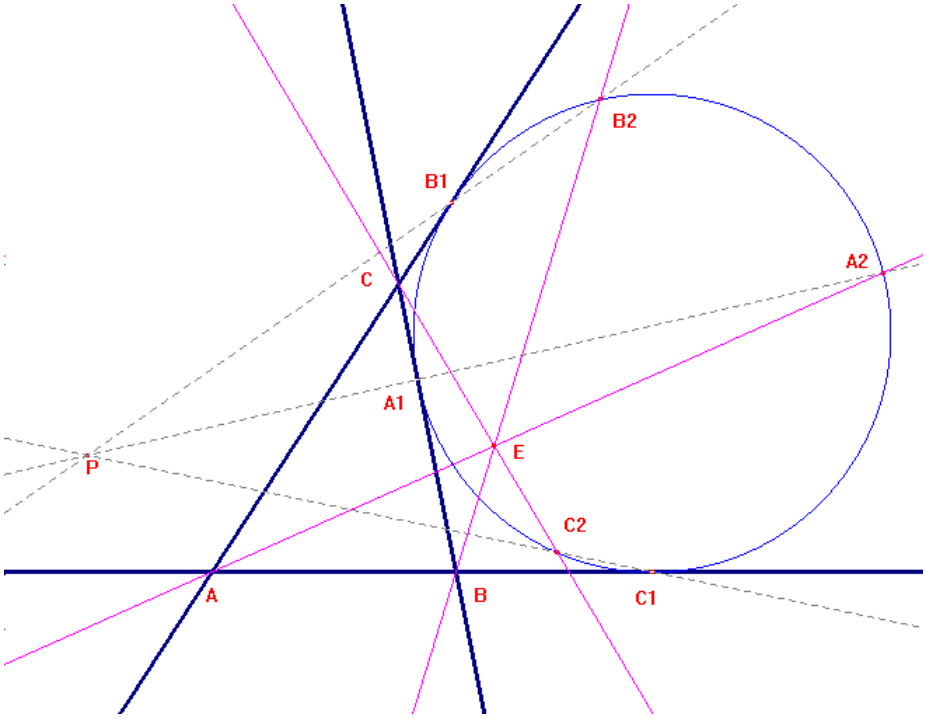
Počítačové overenie

V tomto prípade okrem vrcholov trojuholníka vieme interaktívne premiestniť aj polohu bodu P. S týmito zmenami zistíme, že pri ľubovolnej polohe bodu P a tvaru trojuholníka ABC platí vyslovené tvrdenie.

Dôkaz vety tiež neuvedieme, nakoľko z ďalšieho zovšeobecnenia vyplýva aj jej dôkaz.

Poznámka

Ak predĺžime strany trojuholníka (namiesto úsečiek považujeme ich za priamky), tak podobné tvrdenie môžeme vysloviť aj v súvislosti s pripísanými kružnicami.



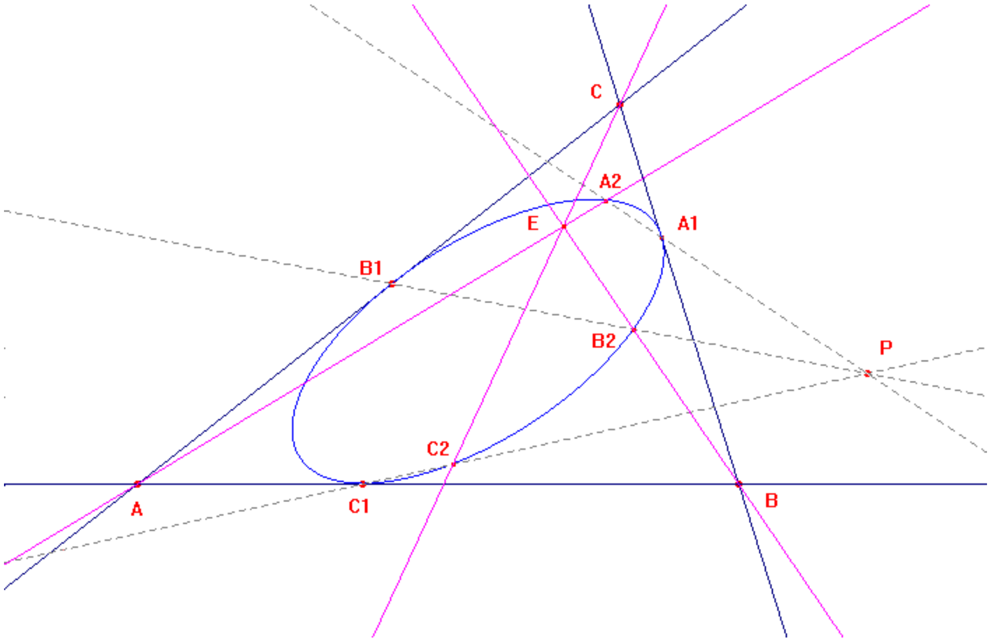
obr. IV. 2. 3

Okrem iných aj tento fakt nás dovedie k ďalšiemu zovšeobecneniu. Namiesto kružnice, ktorá sa dotýka troch priamok uvažujeme o kužeľosečke:

Veta 3

Nech je daný trojuholník *ABC*, kužeľosečka κ, ktorá dotýka priamky *AB, BC, CA* a ľubovolný bod *P* roviny trojuholníka. Dotykové body kužeľosečky s priamkami *AB, BC, CA* označíme postupne C_1, A_1, B_1 ($A_1 \in BC, B_1 \in AC, C_1 \in AB$). Ďalšie priesečníky priamok PA_1, PB_1, PC_1 s kužeľosečkou κ označíme A_2, B_2, C_2 ($PA_1 \cap \kappa = \{A_1, A_2\}$, $PB_1 \cap \kappa = \{B_1, B_2\}$, $SC_1 \cap \kappa = \{C_1, C_2\}$).

Potom platí, že priamky AA_2, BB_2, CC_2 prechádzajú jedným bodom (*E*).



obr. IV. 2. 4

Počítačové overenie

V tomto prípade bolo potrebné najprv zostrojiť jednu kužeľosečku, ktorá sa dotýka predĺžených strán trojuholníka. Môžeme využiť, že kužeľosečka je jednoznačne určená jej tromi dotyčnicami, ak na dvoch dotyčniciach sú dané aj jej dotykové body [3]. Teda bodmi A, B, C určíme budúce dotyčnice AB, BC, CA a na dvoch dotyčniciach zvolíme budúce dotykové body. Nech sú to body B_1 a C_1 na priamkach CA resp. AB. Použitím projektívnej geometrie sme schopní zostrojiť aj ďalšie body kužeľosečky, ako napr. aj bod A_1 … (použili sme metódy popísané v literatúre [3] a [20]). Postačujúce je však nájsť päť bodov kužeľosečky, nakoľko väčšina geometrických programov už zostrojí nimi prechádzajúcu kužeľosečku.

Odteraz postupujeme analogicky ako v predchádzajúcich prípadoch: zvolíme v rovine ľubovolný bod P a podľa postupu popísanej vo vete 3. Zostrojíme priamky AA_2, BB_2, CC_2. Okrem tvaru trojuholníka a polohy bodu P môžeme zmeniť aj tvar kužeľosečky s premiestňovaním bodov B_1 resp. C_1. Zistíme však, že relácia priamok AA_2, BB_2, CC_2 – že prechádzajú jedným bodom – sa nezmení pri žiadnej zmene vstupných údajov (A, B, C, B_1, C_1, P).

Dôkaz

Dôkaz vety uskutočníme analyticky so zavedením homogénnych projektívnych súradníc.

Kvôli jednoduchosti výpočtov za určujúce body homogénnej súradnicovej sústavy zvolíme dotykové body A_1, B_1, C_1 s ľubovolným jednotkovým bodom. (Z toho vyplýva všeobecnosť dôkazu.)

Teda súradnicová sústava je daná repérom $\langle A_1, B_1, C_1, J \rangle$ nasledovne:

$$\begin{aligned} A_1 &= [1, \quad 0, \quad 0] \\ B_1 &= [0, \quad 1, \quad 0] \\ C_1 &= [0, \quad 0, \quad 1] \\ J &= [1, \quad 1, \quad 1]. \end{aligned}$$

V tejto sústave zvolíme - tiež kvôli jednoduchosti vzťahov – kužeľosečku κ, ktorá prechádza bodmi A_1, B_1, C_1, jej rovnica je:

$$\kappa: \quad X_0 X_1 + X_1 X_2 + X_0 X_2 = 0$$

Z tejto rovnice určíme analytické vyjadrenie dotyčníc a, b, c postupne v bodoch A_1, B_1, C_1,:

Pre dotyčnicu a v bode A_1 so súradnicami $a = (x_0, \quad x_1, \quad x_2)$ platí rovnosť:

$$\frac{1}{2}\left(x_0 X_1 + X_0 x_1 + x_1 X_2 + X_1 x_2 + x_0 X_2 + X_0 x_2\right) = 0$$

Po dosadení súradníc bodu $A_1 = [1, \quad 0, \quad 0]$ dostaneme:

$$x_1 + x_2 = 0,$$

teda súradnice priamky $\quad a = (0, \quad 1, \quad 1)$.

Analogicky dostaneme: $\quad b = (1, \quad 0, \quad 1)$,

$$c = (1, \quad 1, \quad 0).$$

Zo súradníc dotyčníc určíme súradnice bodov A, B, C:

$$\begin{aligned} A_1 &= [-1, \quad 1, \quad 1] \\ B_1 &= [1, \quad -1, \quad 1] \\ C_1 &= [1, \quad 1, \quad -1]. \end{aligned}$$

Zvolíme ľubovoľný bod roviny, a preto

$$P = [\alpha, \quad \beta, \quad \gamma].,$$

kde α, β, γ sú ľubovolné reálne hodnoty, pričom nie sú naraz všetky nulové.

Vyjadríme súradnice priamok PA_1, PB_1, PC_1 a potom ich ďalšie priesečníky s kužeľosečkou κ, body A_2, B_2, C_2. Ukážeme to pre bod A_2 (so súradnicami $[X_0, \ X_1, \ X_2]$):

$$A_2 \in PA_1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \\ 1 & 0 & 0 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} = 0, \text{ z čoho:} \quad \beta X_2 - \gamma X_1 = 0$$

$$X_2 = \frac{\gamma}{\beta} X_1$$

$A_2 \in \kappa$, teda jeho súradnice vyhovujú aj rovnici $X_0 X_1 + X_1 X_2 + X_0 X_2 = 0$; po dosadení $X_2 = \frac{\gamma}{\beta} X_1$ platí: $\quad X_0 X_1 + X_1 \frac{\gamma}{\beta} X_1 + X_0 \frac{\gamma}{\beta} X_1 = 0$.

Po úprave: $\quad X_1 = 0 \ \vee \ (\beta + \gamma) X_0 + \gamma X_1 = 0$.

V prípade $X_1 = 0$ aj $X_2 = 0$, teda dostaneme bod A_1.

Teda v prípade $(\beta + \gamma) X_0 + \gamma X_1 = 0$ dostávame súradnice bodu A_2. Po úpravách:

$$A_2 = [-\beta\gamma, \quad \beta(\beta + \gamma), \quad \gamma(\beta + \gamma)].$$

Podobným postupom: $B_2 = [\alpha(\alpha + \gamma), \quad -\alpha\gamma, \quad \gamma(\alpha + \gamma)]$,

$$C_2 = [\alpha(\alpha + \beta), \quad \beta(\alpha + \beta), \quad -\alpha\beta].$$

Teda už môžeme vypočítať súradnice priamok AA_2, BB_2, CC_2, ako príklad uvedieme výpočet pre bod A_2:

$$\begin{pmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \beta(\beta + \gamma) & \gamma(\beta + \gamma) \end{pmatrix} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad (\gamma + \beta)(\gamma - \beta) X_0 + \gamma^2 X_1 - \beta^2 X_2 = 0,$$

z toho: $\quad AA_2 = (\gamma^2 - \beta^2, \quad \gamma^2, \quad -\beta^2)$.

Analogicky: $\quad BB_2 = (-\gamma^2, \quad \alpha^2 - \gamma^2, \quad \alpha^2)$

a $\quad CC_2 = (\beta^2, \quad -\alpha^2, \quad \beta^2 - \alpha^2)$.

Chceme ukázať, že tieto tri priamky prechádzajú jedným bodom. To platí však vtedy a len vtedy, ak súradnice priamok sú lineárne závislé. Pre maticu obsahujúca súradníc priamok:

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} \gamma^2 - \beta^2 & \gamma^2 & -\beta^2 \\ -\gamma^2 & \alpha^2 - \gamma^2 & \alpha^2 \\ \beta^2 & -\alpha^2 & \beta^2 - \alpha^2 \end{pmatrix}$$

však platí, že ich rady matice M sú lineárne závislé (ich súčet je nulový vektor), a preto priamky AA_2, BB_2, CC_2 prechádzajú jedným bodom.

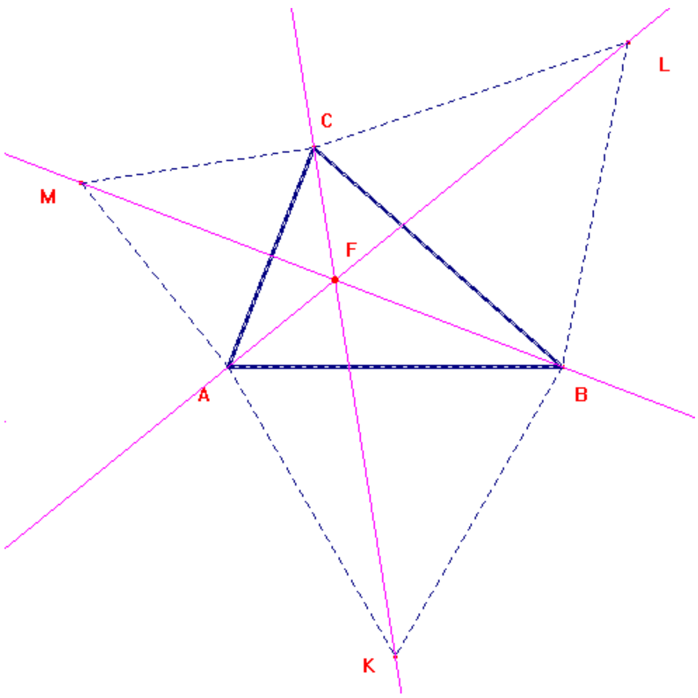
Poznámka:

Z dôkazu vety 3 vyplýva aj pravdivosť viet 2 a 1, ktoré sú špeciálnymi prípadmi vety 3.

IV. 3. ZOVŠEOBECNENIE FERMATOVHO BODU TROJUHOLNÍKA

Veta 1 (Fermatov bod trojuholníka) [13]

Ak nad stranami trojuholníka zostrojíme rovnostranné trojuholníky a ich vrcholy, ktoré neležia na stranách základného trojuholníka spojíme s protiľahlými vrcholmi základného trojuholníka, tak tieto spojnice prechádzajú jedným bodom. Tento bod sa nazýva Fermatov bod trojuholníka.



obr. IV. 3. 1

Poznámka

Rovnostranný trojuholník ABK definujeme „nad stranou" AB trojuholníka ABC tak, že body C a K ležia v opačných polrovinách určených priamkou AB (pozri obr.

IV. 3. 1). Analogicky to platí aj na zvyšné dva trojuholníky *BCL, ACM* nad stranami *BC* resp. *AC*.

Podľa vety priamky *CK, AL* a *BM* prechádzajú bodom *F* (Fermatov bod).

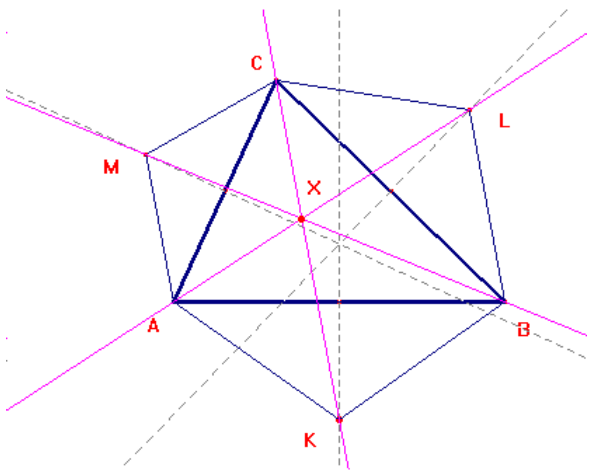
Čo by sme dostali, ak podmienky vety 1 vymeníme za slabšie? Trojuholníky *ABK, BCL* a *CAM* sú rovnostranné, čiže sú navzájom podobné. Dá sa však ukázať, že podobnosť trojuholníkov *ABK, BCL* a *CAM* nie je postačujúca.

Keďže aj rovnostranný trojuholník je rovnoramenným (špeciálny prípad), v podmienke vety vlastnosť „rovnostranný" zameníme (oslabíme) na „podobný a rovnoramenný".

Takto dostaneme takéto tvrdenie:

<u>Veta 2</u> (Zovšeobecnenie Fermatovho bodu)

Nech je daný všeobecný trojuholník *ABC* a nad jeho stranami navzájom podobné rovnoramenné trojuholníky *ABK BCL* a *CAM*. Potom priamky *AL,BM* a *CK* sa pretnú v jednom bode (obr. IV. 3. 2).



obr. IV. 3. 2

<u>Poznámka</u>

V tomto prípade body *C* a *K* nemusia ležať na opačných stranách priamky *AB*, ale ak bod *K* leží v polrovine *ABC*, tak bod *L* musí ležať v polrovine *BCA* a bod *M* musí ležať v polrovine *CAB*.

Počítačové overenie

Úlohou je zostrojiť nad úsečkami *AB, BC* a *CA* také interaktívne trojuholníky *ABK, BCL* a *CAM*, aby sa vyhovovali podmienkam tvrdenia.

Pretože trojuholníky *ABK, BCL* a *CAM* sú rovnoramenné, vyplýva sa z toho, že body *K, L* a *M* ležia na príslušných osiach strany trojuholníka *ABC.* Ďalej trojuholníky *ABK, BCL* a *CAM* sú aj podobné, vyplýva sa z toho na ich uhly ležiace na základoch, že majú rovnakú veľkosť:

$$|\angle ABK| = |\angle BAK| = |\angle BCL| = |\angle CBL| = |\angle CAM| = |\angle ACM|$$

Na základe toho zvolíme na osi úsečky *AB* ľubovolný bod *K*. Takto určený uhol *BAK* prenesieme (prenášanie uhla pomocou kružníc) aj na ďalšie strany trojuholníka *ABC.* Ramená týchto uhlov pretnú osi príslušných strán v hľadaných bodoch *L* a *M*.

Takto zostrojené trojuholníky *ABK, BCL* a *CAM* vyhovujú podmienkam vety a sú interaktívne: zostane ich podobnosť a rovnoramennosť aj s premiestením bodu K na osi strany *AB*, alebo so zmenou tvaru základného trojuholníka *ABC*.

So zostrojením priamok *CK, BM* a *AL* zistíme, že tie priamky vždy prechádzajú jedným bodom. Nezmení to však ani vtedy, ak zmeníme polohu bodu K na osi strany *AB*, alebo so zmenou tvaru základného trojuholníka *ABC*.

Tým sme overili platnosť tvrdenia pomocou počítača.

Dôkaz

Dôkaz vety uskutočňujeme analyticky. Zavedieme vhodnú pravouhlú súradnicovú sústavu. Nech pri bodoch *A* a *B* nie sú väčšie vnútorné uhly ako 90° (keby boli, tak vhodne prehodíme označenia), nech bod *A* je začiatkom súradnicovej sústavy a bod *B* jednotkovým bodom osi x. Potom bod *C* má ľubovolné súradnice z intervalu <0,1>, pričom y-ová zložka nie je nulová:

$A = [0,0]$

$B = [1,0]$

$C = [e, f]\ ;\ e, f \in \mathbf{R},\ 0<e<1\ ;\ f \neq 0.$

Bod K môžeme vyjadriť s vektorovou rovnicou v tvare:

$$K = C_0 + t \cdot \vec{n}_{AB},$$

kde C_0 je stred úsečky AB, $\vec{n}_{AB} \perp \overrightarrow{AB} \wedge |\vec{n}_{AB}| = |\overrightarrow{AB}|$ a t je ľubovoľný reálny parameter. Podobne:

$$L = A_0 + t \cdot \vec{n}_{BC},$$

kde A_0 je stred úsečky BC, $\vec{n}_{BC} \perp \overrightarrow{BC} \wedge |\vec{n}_{BC}| = |\overrightarrow{BC}|$;

$$M = B_0 + t \cdot \vec{n}_{CA},$$

kde B_0 je stred úsečky CA, $\vec{n}_{CA} \perp \overrightarrow{CA} \wedge |\vec{n}_{CA}| = |\overrightarrow{CA}|$.

Samozrejme, pri výbere vektorov $\vec{n}_{AB}, \vec{n}_{BC}, \vec{n}_{CA}$ je zohľadnená aj poznámka za vetou 2.

Na základe toho súradnice bodov K, L a M sú vyjadrené v tvare:

$$K = \left[\frac{1}{2}, -t\right]$$

$$L = \left[\frac{e+1}{2} + f \cdot t,\ \frac{f}{2} + (1-e) \cdot t\right]$$

$$M = \left[\frac{e}{2} - f \cdot t, \frac{f}{2} + e \cdot t\right]$$

Z toho môžeme odvodiť všeobecnú rovnicu priamok AL, BM a CK

$$AL: \left(\frac{1}{2} f + t - t\,e\right) x - \left(\frac{1}{2} e + \frac{1}{2} + f\,t\right) y = 0 \qquad (1)$$

$$BM: \left(\frac{1}{2} f + t\,e\right) x - \left(\frac{1}{2} e - f\,t - 1\right) y - \frac{1}{2} f - t\,e = 0 \qquad (2)$$

$$CK: (f + t)\,x - \left(e - \frac{1}{2}\right) y - \frac{1}{2} f - t\,e = 0 \qquad (3)$$

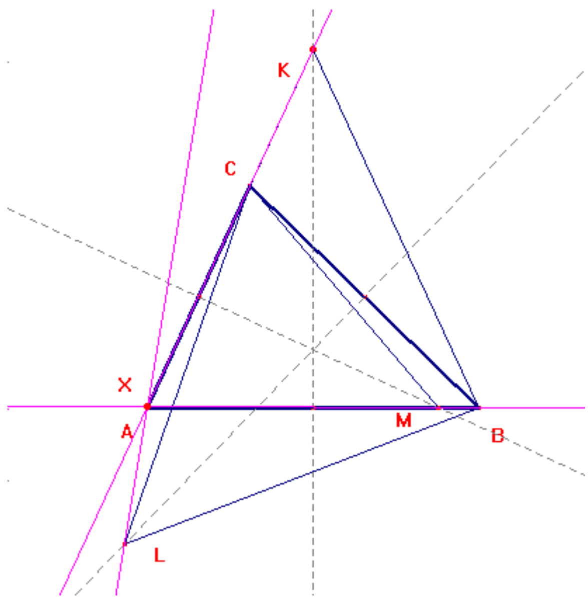
Ak sčítame prvú a druhú rovnicu, tak dostaneme tretiu rovnicu, čo znamená, že priesečník priamok AL a BM leží na priamke CK, čiže priamky AL, BM a CK prechádzajú jedným bodom.

<u>Poznámka</u>

- Z dôkazu vety vyplýva platnosť vety pre Fermatov bod trojuholníka ($t = \frac{\sqrt{3}}{2}$), resp. platnosť vety pre tzv. Napoleonov bod [13] ($t = \frac{\sqrt{3}}{6}$).
- Ak $t = 0$ body K, L, M budú stredy strán AB, BC resp. CA, čiže stred X splynie s ťažiskom trojuholníka ABC; $X \equiv T$.

§ Predpokladajme, že $t \to \pm\infty$. Bod K teda dostaneme do „nekonečna“, bude nevlastným bodom roviny *ABC.* Trojuholník *ABK* je rovnoramenný so základom AB. V tomto prípade $|\angle KAB| = |\angle ABK| = \frac{\pi}{2}$, lebo uhol rovnobežných priamok je nulový a súčet vnútorných uhlov trojuholníka je π. Priamky *AK, BK* a *CK* sú z jedného zväzku nevlastného bodu *K*, teda sú navzájom rovnobežné. To znamená, že aj $CK \perp AB$, čiže *CK* je výškou trojuholníka na stranu *AB.* Podobne pre takto zvolenú parametrickú hodnotu body *L, M* sú nevlastnými bodmi roviny *ABC* a priamky *AL* resp. *BM* sú výškami trojuholníka na strany *BC* resp. *AC.* Teda hľadaný bod *X* je ortocentrum trojuholníka ABC; $X \equiv V$.

§ Zvoľme si parameter *t* tak, aby bod *K* ležal na priamke *AC*! Z podobnosti trojuholníkov *ABK* a *CAM* vyplýva, že bod *M* teraz musí taktiež incidovať s priamkou *AB*. Nami hľadaný “stred“ *X* je priesečník priamok *CK* a *BM*. Keďže priamky *CK* a *AC* resp. *BM* a *AB* sú totožné, bod *X* je totožný s vrcholom *A*. Táto situácia je načrtnutá na obr. IV. 3. 3



obr. IV. 3. 3

Podobným spôsobom môžeme bod *X* stotožniť aj s vrcholmi *B* a *C.*

Vyšetrime množinu všetkých “stredov“ *X* !

Ako vidno z poznámok, táto množina obsahuje ťažisko, ortocentrum, Fermatov a Napoleonov bod a ak trojuholník *ABC* nie je rovnoramenný, tak aj jeho vrcholy.

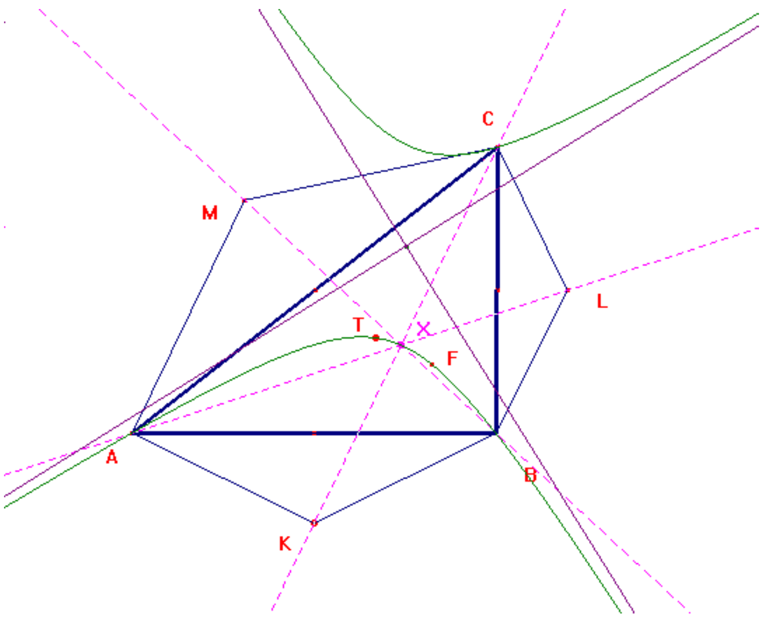
Veta 3 (množina všetkých bodov získaných zovšeobecnením Fermatovho bodu)

Množina ***M*** všetkých bodov *X* s vlastnosťou opísanou vo vete 2 tvorí kužeľosečku:

i. Pre rovnostranný trojuholník *ABC* množina ***M*** je **jeden bod**, stred trojuholníka (ťažisko, ortocentrum, ...) - (singulárna kužeľosečka).

ii. Pre rovnoramenný trojuholník *ABC* body množiny ***M*** je **priamka** * - os základne (singulárna kužeľosečka).

iii. V ostatných prípadoch pre všeobecný trojuholník je to **hyperbola s kolmými asymptotami** (rovnoosá hyperbola), ktorá prechádza vrcholmi trojuholníka *ABC*, cez ťažisko *T*, ortocentrum *V* a Fermatov bod *F* (je regulárnou kužeľosečkou).



obr. IV. 3. 4

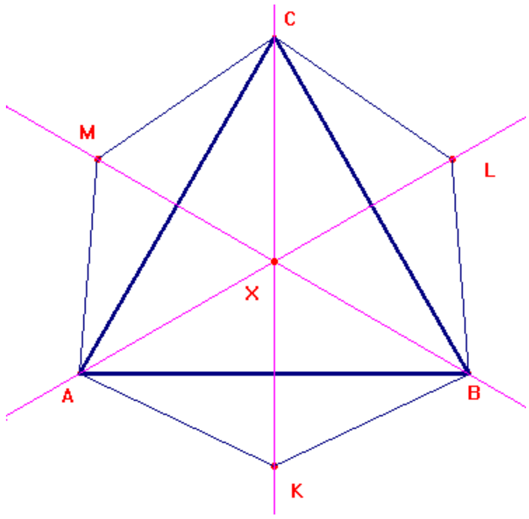
* Poznámka: kvôli úplnosti musíme dodať že toto tvrdenie je otázka pohľadu. Pri predpoklade, že základňou je strana *AB*, môže sa stať, že bod *K* splýva bodom *C*. V tomto prípade priamka *CK* nie je jednoznačne určená, pričom priamky *AL* a *BM* splývajú s priamkou *AB*.

- Ak na to dívame z kontinuálneho hľadiska, tak dostaneme za bod *X* stred základne *AB* a za množinu bodov *X* dostaneme **jednu priamku**.

- Ak na to dívame z hľadiska, že priamka *CK* v tomto prípade nie je jednoznačne určená, tak môžeme považovať za tú priamku celý zväzok priamok prechádzajúci bodom *C* (*K*). V tomto prípade však za hľadaný priesečník priamok *X* dostaneme priamku *AB* a preto za množinu bodov *X* dostaneme **dve na seba kolmé priamky** (priamku základne a os základne).

Počítačové overenie

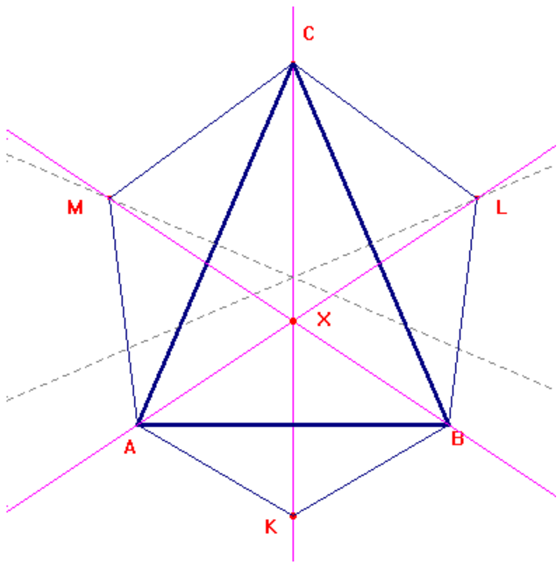
i. Zostrojíme situáciu (pevný rovnostranný trojuholník ABC a pohyblivý bod K na osi strany AB):



obr. IV. 3. 5

Vidno aj z obrázku, že priamky AL, BM, CK tú totožné s príslušnými osami strán (osami vnútorných uhlov, výškami, …), teda bod X bude stredom (stred vpísanej a opísanej kružnice, ťažisko, ortocentrum, …) trojuholníka ABC.

ii. Zostrojíme situáciu, rovnoramenný trojuholník so základňou AB a pohyblivý bod K na osi strany AB:



obr. IV. 3. 6

Pri premiestňovaní bodu K vidíme, že pre bod X dostávame body osi základne AB (všetky) okrem jediného prípadu: ak $C \equiv K$ priamka CK nie je určená jednoznačne a priamky *MB* a *AL* sú totožné, teda bod *X* môže byť hociktorým bodom priamky *AB* (poznámka *).

iii. Nami charakterizovanými softvérmi je možné vykresliť hľadanú množinu (možnosti Geometrické miesto bodov resp. Stopa), čo nám však ukáže len tvar hľadanej množiny. Ak predpokladáme platnosť vety, sme schopní zostrojiť pomocou programu aj kužeľosečku prechádzajúcu piatimi bodmi: uvažujeme za určujúce body kužeľosečky vrcholy *A, B, C*, ťažisko *T*, a Fermatov bod *F*. So zmenou tvaru trojuholníka *ABC* sa dá overiť, že táto kužeľosečka je vždy hyperbolou (samozrejme okrem prípadov i. a ii.).

Premiestňovaním bodu *K* sa ukáže, že bod *X* je naozaj a vždy bodom tejto kužeľosečky.

Kolmosť asymptôt pomocou programu Euklides sa dá tiež veľmi jednoducho ukázať. Program určí ohniská kužeľosečky. Z toho zostrojíme stred hyperboly, z čoho zostrojíme k hyperbole dotyčnice. Tieto priamky budú asymptotami hyperboly.

Pomocou programu Cabri je táto konštrukcia zložitejšia. Pomocou vety o rovnobežných tetív sme schopný zostrojiť stred hyperboly, a takto aj asymptoty (pričom sme použili, že hyperbola je rovnoosá). Ich kolmosť vieme overiť napr. pomocou merania.

DÔKAZ

i. Vzhľadom na symetrie, ktoré platia v rovnostrannom trojuholníku, priamky *AL, BM, CK* sú výškami trojuholníka *ABC* úplne nezávislé od hodnoty parametra *t*. Teda hľadaná množina bodov *X* je jednobodovou množinou. Analyticky:

$$A = [0,0],$$

$$B = [1,0],$$

$$C = \left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right].$$

Na základe toho súradnice bodov *K, L* a *M* sú vyjadrené v tvare:

$$K=\left[\frac{1}{2},-t\right],$$
$$L=\left[\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}t,\ \frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{2}t\right],$$
$$M=\left[\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}t,\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{2}t\right].$$

Po napísaní rovníc priamok *AL, BM* a *CK* môžeme vyjadriť bod *X* ako ich priesečník:

$$\mathrm{AL}:\ (\sqrt{3}+2t)x-(3+2\sqrt{3}t)y=0,$$
$$BM:\ (\sqrt{3}+2t)x+(3+2\sqrt{3}t)y-\sqrt{3}-2t=0,$$
$$CK:\ \ x=\frac{1}{2}$$

Čiže súradnice bodu X:

$$X=\left[\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{6}\right],$$

Súradnice ťažiska *T* môžeme dostať ako aritmetický priemer súradníc vrcholov:

$$T=\frac{A+B+C}{3}.$$

Po dosadení súradníc vrcholov dostaneme ťažisko so súradnicami:

$$T=\left[\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{6}\right],$$

čiže ako vidíme nezávisle od parametra *t* súradnice bodu *X* a stredu (ťažiska) trojuholníka *ABC* sú totožné.

ii. Môžeme si reprodukovať počítačom podporované riešenie. Za základňu zvolíme stranu *AB*. Súradnice vrcholov:

A = [*0,0*],

B = [*1,0*],

$$C=\left[\frac{1}{2},f\right],\quad f\in\mathbf{R},\ f\neq 0.$$

Na základe toho súradnice bodov *K, L* a *M* môžeme vyjadriť tvare:

$$K = \left[\frac{1}{2}, -t\right],$$
$$L = \left[\frac{3}{4} + ft,\ \frac{f+t}{2}\right],$$
$$M = \left[\frac{1}{4} - ft, \frac{f+t}{2}\right].$$

Po napísaní rovníc priamok *AL, BM* a *CK* môžeme vyjadriť bod *X* ako ich priesečník:

$$AL:\ \left(\frac{f+t}{2}\right)x - \left(\frac{3}{4} + ft\right)y = 0$$

$$BM:\ \left(\frac{f+t}{2}\right)x + \left(\frac{3}{4} + ft\right)y - \frac{f+t}{2} = 0$$

$CK:\ x = \frac{1}{2}$, ak $t \neq -f$, v opačnom prípade nedefinovaná.

Z toho súradnice bodu X:

$$X = \left[\frac{1}{2}, \frac{f+t}{3+4ft}\right],$$

Teda množina všetkých takých bodov je priamka $x = \frac{1}{2}$, os základne *AB*. O nedefinovanom prípade sme už mienili pri vyslovení vety v poznámke (*)

iii. Body *A, B, C, T* a *F* jednoznačne určujú jednu regulárnu kužeľosečku κ (uvedené body sú navzájom rôzne a žiadne tri z nich nie sú kolineárne). Súradnice týchto bodov majú analitické vyjadrenie v tvare:

$$A = [0,\ 0]$$
$$B = [1,\ 0]$$
$$C = [e,\ f], \quad \text{kde } e \in \mathbf{R},\ f \in \mathbf{R} - \{0\};$$
$$T = \left[\frac{1+e}{3}, \frac{f}{3}\right]$$

$$F = \left[\frac{4fe + \sqrt{3}f^2 + f + \sqrt{3}e + \sqrt{3}e^2}{2(3f - \sqrt{3}e + \sqrt{3}f^2 + \sqrt{3}e^2 + \sqrt{3})}, -\frac{(f + \sqrt{3}e)(\sqrt{3}e - f - \sqrt{3}}{2(3f - \sqrt{3}e + \sqrt{3}f^2 + \sqrt{3}e^2 + \sqrt{3})}\right]$$

Bod X hľadanej množiny vyjadríme parametricky pomocou reálneho parametra t (podobne ako prechádzajúcom dôkaze) ako priesečník priamok AL, BM, CK z rovníc týchto priamok. Jednotlivé súradnice:

$$X = \left[\frac{ef + 2f^2t + f + 2te + 2te^2 + 4ft^2e}{3f - 4te + 4f^2t + 4te^2 + 4t + 4ft^2}, \frac{(f + 2te)(2te - f - 2t)}{3f - 4te + 4f^2t + 4te^2 + 4t + 4ft^2} \right].$$

Bod X je vtedy a len vtedy bodom kužeľosečky κ, ak determinant matici M

$$M = \begin{pmatrix} x_X^2 & x_X y_X & y_X^2 & x_X & y_X & 1 \\ x_A^2 & x_A y_A & y_A^2 & x_A & y_A & 1 \\ x_B^2 & x_B y_B & y_B^2 & x_B & y_B & 1 \\ x_C^2 & x_C y_C & y_C^2 & x_C & y_C & 1 \\ x_T^2 & x_T y_T & y_T^2 & x_T & y_T & 1 \\ x_V^2 & x_V y_V & y_V^2 & x_V & y_V & 1 \end{pmatrix}$$

sa rovná nule, kde x_X, x_A, ... ,x_F. resp. y_X, y_A ... ,y_F sú x-ové resp. y-ové súradnice bodov X, A, B, C, T, F.

Po dosadení súradníc jednotlivých bodov A, B, C, T, F a X a algebrických úpravách zistíme, že hodnota determinantu matice M je identicky nulová nezávisle od hodnoty parametra t. To znamená, že množina M všetkých bodov X je naozaj kužeľosečka.

Na určenie typu kužeľosečky rozšírime euklidovskú rovinu o nevlastnú priamku. Hyperbola má s nevlastnou priamkou dva spoločné body. Bod X je nevlastným bodom roviny vtedy a len vtedy, ak priamky AL, BM a CK sú rovnobežné. Teda normálové vektory týchto priamok sa líšia iba skalárnym násobkom. Vyriešme sústavu rovníc s neznámou t (na ľavej strane rovníc máme jednotlivé súradnice normálového vektora priamky AL a na pravej strane priamky CK) :

$$\frac{\mathrm{f}}{2} + (1 - e)t = \mu\,(f + t)$$
$$\frac{e + 1}{2} + ft = \mu\,(e - \frac{1}{2})$$

Elimináciou neznámej μ a ďalšími úpravami dostaneme kvadratickú rovnicu pre t. Riešenia určujú hodnotu parametra, pre ktoré sú priamky AL, BM a CK sú rovnobežné:

$$t_1 = \frac{e-1-f^2-e^2+\sqrt{3e^2-2e-2ef^2-2e^3+1-f^2+f^4+2f^2e^2+e^4}}{2f} \quad (*)$$

$$t_2 = \frac{e-1-f^2-e^2-\sqrt{3e^2-2e-2ef^2-2e^3+1-f^2+f^4+2f^2e^2+e^4}}{2f} \quad (**)$$

Otázka je, či sú vypočítané hodnoty reálne a rôzne. K tomu musíme vyšetriť diskriminant :

$$D = 3e^2-2e-2ef^2-2e^3+1-f^2+f^4+2f^2e^2+e^4.$$

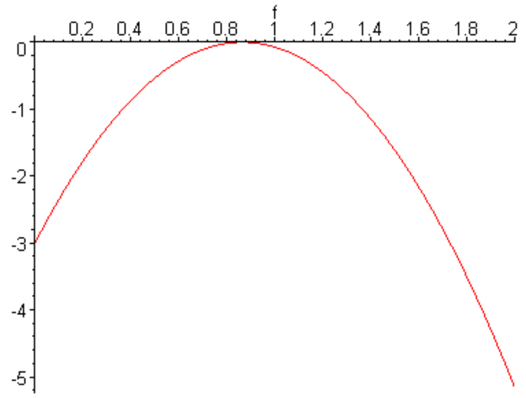
Ak chceme dostať reálne hodnoty na *t*, tak diskriminant nemôže byť záporný. Vyšetrením rovnice $D=0$ zistíme na akých intervaloch má *D* kladnú, resp. zápornú hodnotu. Teda vypočítame korene rovnice pre neznámu *e*:

$$3e^2-2e-2ef^2-2e^3+1-f^2+f^4+2f^2e^2+e^4=0.$$

Dostaneme riešenia

$$e_{1,2,3,4} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-3 \pm 4\sqrt{3}f - 4f^2}.$$

Hodnoty $-3 \pm 4\sqrt{3}f - 4f^2$ sú však okrem hodnôt $f_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ vždy záporné, t.j. *D* je vždy buď nezáporný, alebo nekladný.



obr. IV. 3. 7 graf funkcie: $e = -3 + 4\sqrt{3}f - 4f^2$

V prípade $f_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ je $e_{1,2} = \frac{1}{2}$ a *D* = 0. Z toho síce vyplýva $t_1 = t_2$, ale to už bolo vyšetrené v prípade **i.**

Pre $e = f = 1$ dostaneme $D = 1$, čiže pre $\forall e, f \in \mathbf{R}$ hodnota diskriminantu D je vždy nezáporná, okrem $f_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ a $e_{1,2} = \frac{1}{2}$ vždy kladná. Teda okrem špeciálneho prípadu parametra ($f_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$), t_1 a t_2 pre ľubovolné súradnice e, f bodu C existujú, sú reálne a rôzne. Čiže kužeľosečka κ má dva rôzne nevlastné body, teda je to buď hyperbola alebo dve rôznobežné priamky. Kužeľosečka nimi určená musí byť regulárnou, lebo žiadne tri body z bodov A, B, C, T, F neležia na jednej priamke. Teda kužeľosečka κ je hyperbolou.

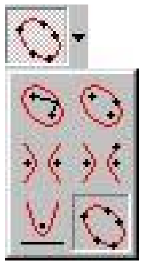
Zostáva nám dokázať, že asymptoty hyperboly κ' sú navzájom kolmé. Dosadíme do rovnice priamky CK vypočítané hodnoty parametra t_1 resp. t_2 a určíme ich smerové vektory: $\left(\frac{1}{2} + e,\ f + t_1\right)$ resp. $\left(\frac{1}{2} + e,\ f + t_2\right)$. Sú to vlastne smerové vektory asymptôt. Ich kolmosť ukážeme pomocou skalárného súčinu. Skalárny súčin $\left(\frac{1}{2} + e\right)^2 + (f + t_1)(f + t_2)$ po dosadení hodnôt parametra t_1 a t_2 (vzťahy (*) a (**)) po zjednodušení nadobudne nulovú hodnotu. Čiže asymptoty hyperboly κ sú na seba kolmé.

IV. 4. KUŽEĽOSEČKY POMOCOU PROGRAMU EUKLIDES

Tematika kužeľosečiek sa vyučuje v 3. ročníku gymnázia v rámci analytickej geometrie a na vysokých školách, univerzitách. Hoci študenti isté poznatky o kužeľosečkách majú aj z iných oblastí matematiky, ich predstava je značne infikovaná analytickým spôsobom videnia. Naším hlavným cieľom je poukázať na to, že môžeme študentom predviesť vo vyučovaní túto teóriu, ktorá je pomerne náročná na predstavivosť aj na jej syntetické ponímanie.

V ďalšej časti ukážeme spôsoby možných konštrukcií pomocou geometrického programu Euklides a ich výhody oproti klasickým metódam. Predvedieme interaktívne konštrukcie, ktoré boli narysované podľa jednotlivých definícií.

V ikonovej skupine kužeľosečiek si môžeme vybrať pre priame konštrukčné postupy z týchto možností:



- elipsa daná ohniskami a bodom krivky,
- elipsa daná ohniskami a súčtom sprievodičov,
- hyperbola daná ohniskami a bodom krivky,
- hyperbola daná ohniskami a rozdielom sprievodičov,
- parabola daná ohniskom a určujúcou priamkou,
- kužeľosečka prechádzajúca piatimi danými bodmi.

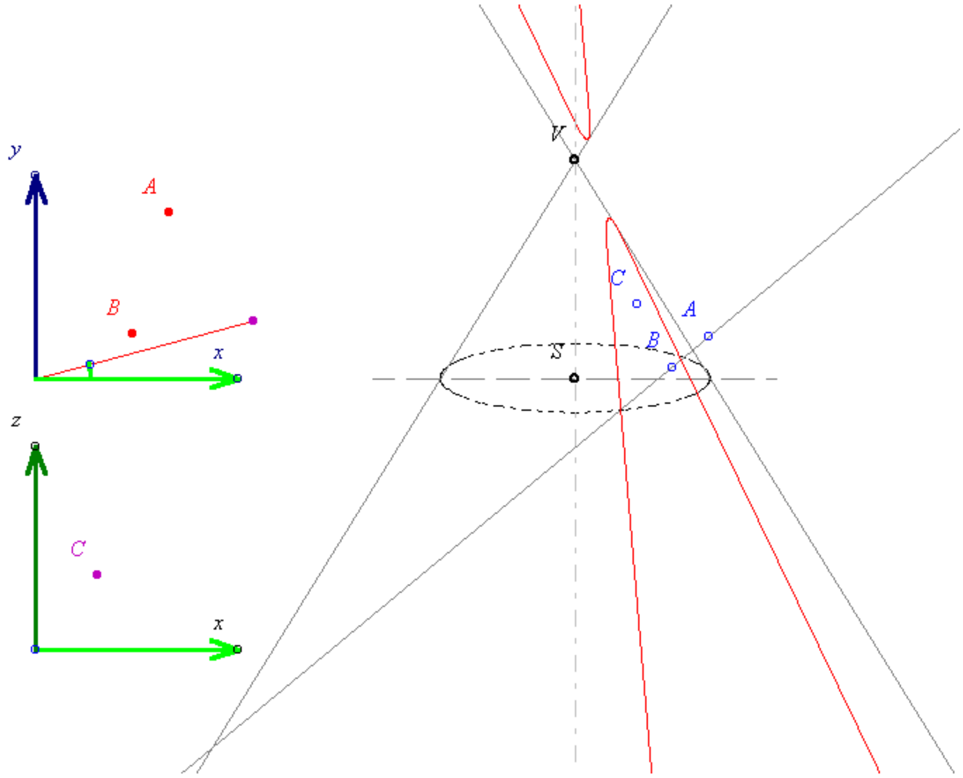
Ďalej ako vizuálny efekt môžeme použiť aj ikonu (), ktorou program vykreslí stopu. Teraz ukážme interaktívne konštrukcie, zostrojené pomocou tohto softvéru podľa jednotlivých definícií.

Rezy rotačného kužeľa s rovinou:

- Rovina, ktorá nie je vrcholová ani kolmá na os kužeľa a ktorá zviera s rovinou povrchovej kružnice rotačnej kužeľovej plochy uhol menší než povrchové priamky plochy, pretína rotačnú kužeľovú plochu v elipse.
- Rovina, ktorá nie je vrcholová a zviera s rovinou povrchovej kružnice rotačnej kužeľovej plochy ten istý uhol než povrchové priamky plochy, pretína rotačnú kužeľovú plochu v parabole.
- Rovina, ktorá nie je vrcholová a zviera s rovinou povrchovej kružnice rotačnej kužeľovej plochy uhol, ktorý je väčší ako uhol povrchových priamok plochy s tou istou rovinou, pretína rotačnú kužeľovú plochu v hyperbole.

Konštrukcia

Situáciu si vložíme do karteziánskeho súradnicového systému (x, y, z). V rovine xy si zvolíme jednu kružnicu s pevným polomerom so stredom v bode S=[0,0] a na osi z bod V ako vrchol. Nimi je určený jeden rotačný dvojkužeľ. Tento dvojkužeľ premietame na rovinu v rovnobežnom premietaní na rovinu tak, že os x fixujeme. Celý kužeľ vieme otáčať podľa tejto osi, čo sme si zobrazili na pravej časti konštrukcie ako vodorovnú prerušovanú úsečku. Tomuto otáčaniu zodpovedá jeden uhol (vyznačený zeleným oblúkom), čo vieme zmeniť na ľavej časti konštrukcie so zmenou smeru červenej úsečky medzi vektormi, ktoré symbolizujú rovinu *xz*; ak tento uhol je nulový, vidíme priemet kužeľa na rovinu *xz*. Zmena toho uhla spôsobuje, že základnú kružnicu musíme zobraziť do elipsy, ktorej hlavná os zostane nezmenenou avšak veľkosť vedľajšej osi klesá zmenou (zmenšovaním) toho uhla. S tým viazane mení sa aj poloha zobrazeného vrcholu. Pomocou spomínanej červenej úsečky vieme zmeniť aj vzdialenosť vrcholu od roviny základnej kružnice (jej dĺžka sa rovná skutočnej vzdialenosti vrcholu od roviny základnej kružnice). Tým je vlastne kužeľ zobrazený.



obr. IV. 4. 1

K reznej rovine sme potrebovali tri body. Z toho dve *A* a *B* sme si zvolili v rovine *xy* základnej kružnice, a tretí, bod *C* v rovine *xz*. Ich skutočné umiestenie vzhľadom na súradnicové osi v jednotlivých rovinách sme simulovali na ľavej hornej časti, kde body *A* a *B* sú dané v rovine symbolizovanými vektormi *x* a *y*. Umiestnenie týchto bodov vieme zmeniť, pričom sa zobrazia ich perspektívne obrazy v „skutočnej", naklonenej rovine základnej kružnice kužeľa. Podobne je zvolený aj bod *C* na ľavej dolnej časti konštrukcie vzhľadom na rovinu symbolizovanú vektormi *x* a *z*. Analogicky sa zobrazí aj jeho perspektívny obraz. K tomu boli použité vlastnosti rovnobežného premietania a osovej afinity.

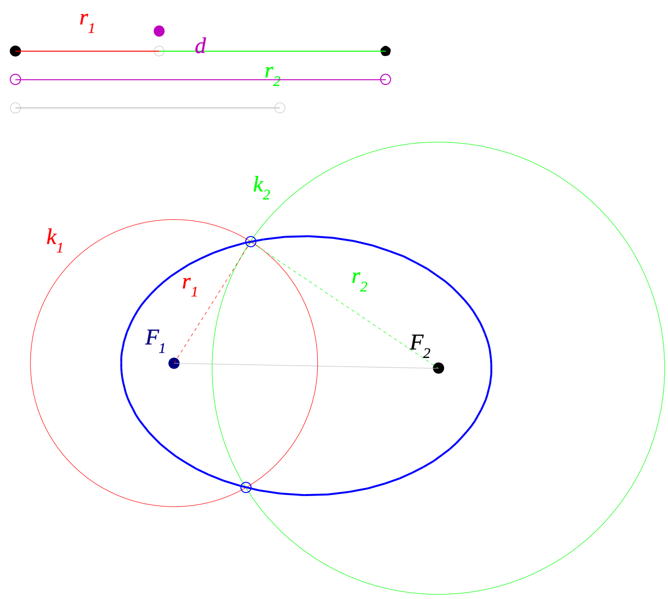
Pri hľadaní spoločných bodov roviny ABC s kužeľovou plochou sme využili okrem spomenutej afinity aj vlastnosti centrálnej projekcie so stredom vo vrchole V kužeľa. Najjednoduchšie určíme prienik v rovine xz, potom bolo potrebné zaviesť pomocné roviny, aby sme dostali ďalšie body prieniku: rovinu, ktorá obsahuje vrchol kužeľa V a stred základnej kružnice S a ktorá je rovnobežná s priamkou AB. Pri ďalšej rovine sme zvolili takú, ktorá nemôže splynúť ani s jedným zo spomenutých: ktorá obsahuje vrchol kužeľa V, neprechádzajúci stredom základnej kružnice S, a ktorá je rovnobežná s priamkou AB. Takto sme dostali 6 bodov danej kužeľosečky, z ktorého sme päť použili ku konštrukcii kužeľosečky.

Hotovou konštrukciou je možno demonštrovať prienik kužeľa s rovinou. Kužeľ („výšku" resp. sklon perspektívy) zmeníme červenou úsečkou na hornej ľavej časti konštrukcie. Reznú rovinu zmeníme bodmi A, B a C; body A a B v rovine základnej roviny xy; bod C v rovine xz, ktoré sú zobrazené tiež na ľavej časti konštrukcie.

Na pravej časti konštrukcie zobrazuje sa prenik kužeľovej plochy s rovinou v rovnobežnom premietaní. Samozrejme uskutočnené zmeny v zadaní kužeľa alebo roviny sa objavia v priemete ihneď.

<u>Ohnisková definícia elipsy</u>

Elipsa je množinou všetkých bodov v rovine, ktoré majú od dvoch rôznych bodov stály súčet vzdialeností väčší než vzdialenosť daných bodov (obr. IV. 4. 2).

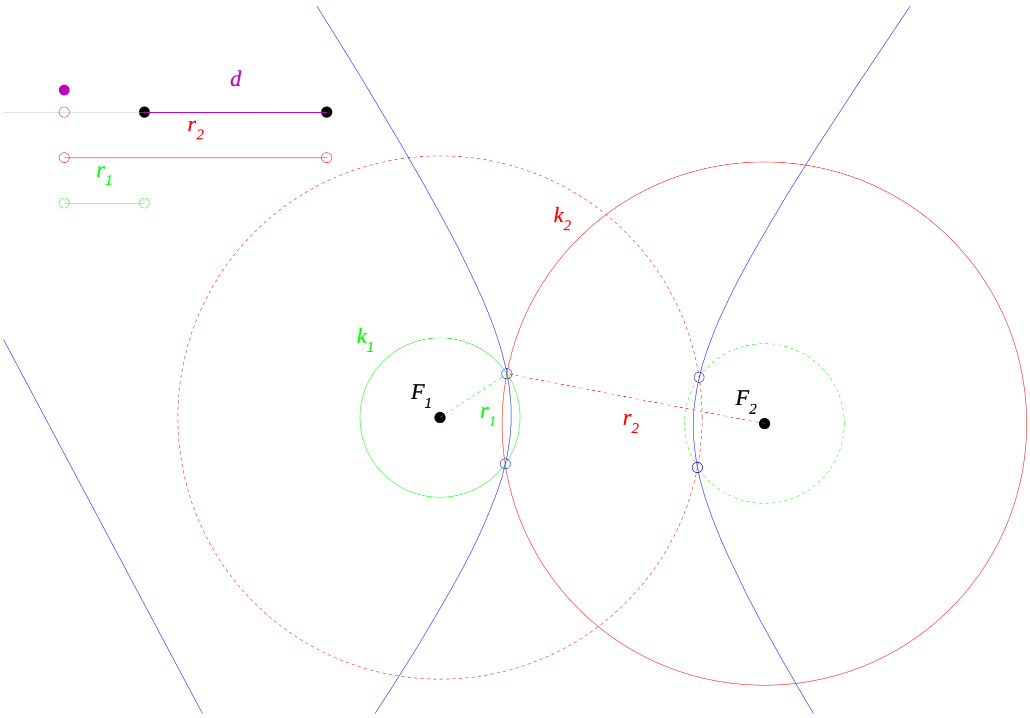


obr. IV. 4. 2

Konštrukcia: Zoberieme si na rovine dva body F_1 a F_2 (ohniská) a úsečku d (súčet sprievodičov), ktorá je väčšia než $|F_1F_2|$. Zostrojíme priemet ľubovoľného bodu na úsečku d, čo nám úsečku rozdelí na dve časti r_1 a r_2 tak, aby $r_1 + r_2 = d$, a potom kružnice k_1 (F_1,r_1) a k_2 (F_2,r_2). Množina všetkých priesečníkov týchto kružníc je elipsa. Môžeme to ukázať, ak zmeníme pomer r_1 , r_2.

Ohnisková definícia hyperboly

Hyperbola je množinou všetkých bodov v rovine, ktoré majú od dvoch rôznych bodov stály rozdiel vzdialeností väčší než vzdialenosť daných bodov (obr. IV. 4. 3).

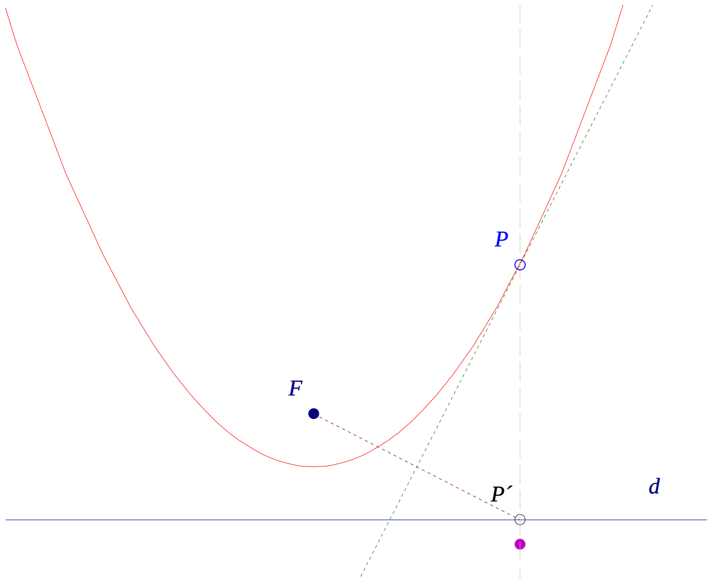


obr. IV. 4. 3

Konštrukcia: Vyberieme si v rovine dva body F_1 a F_2 a polpriamku, na ktorej je vyznačená úsečka d, ktorá je väčšia než $|F_1F_2|$. Zostrojíme priemet ľubovoľného bodu na úsečku, časť polpriamky mimo úsečky d. Ten bod nám určí úsečky r_1 a r_2 od koncových bodov úsečky d tak, že bude platiť: $|r_1 - r_2| = d$. Takto ako priesečník kružníc k_1 (F_1,r_1) a k_2 (F_2,r_2) dostaneme bod danej hyperboly. Množina všetkých priesečníkov týchto kružníc je hľadaná hyperbola. Môžeme to ukázať, ak zmeníme pomer r_1 , r_2.

Ohnisková definícia paraboly

Parabola je množinou všetkých bodov v rovine, ktoré majú od pevného bodu a pevnej priamky, ktorá týmto bodom neprechádza, rovnaké vzdialenosti (obr. IV. 4. 4).



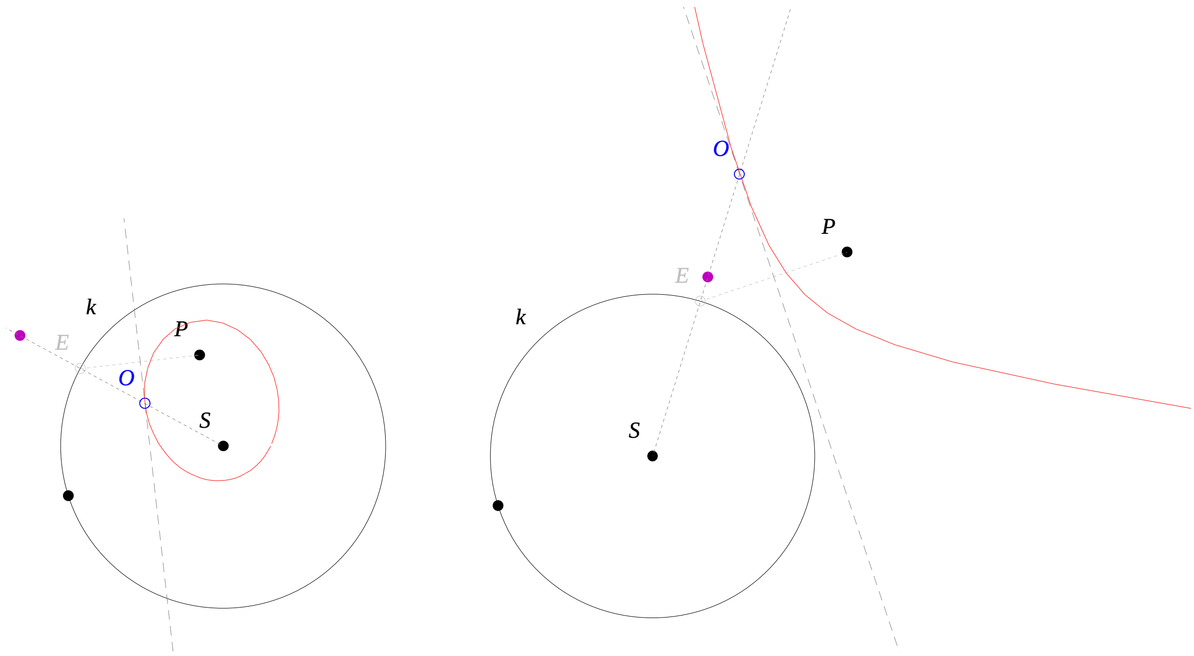
obr. IV. 4. 4

Konštrukcia

Vyberieme si v rovine priamku *d* (určujúca priamka) a bod *F* (ohnisko) ležiaci mimo nej. Zostrojíme kolmicu na priamku *d* v ľubovolnom bode (*K*) priamky *d* a os úsečky *FK*. Ako priesečník osi a kolmice dostaneme bod paraboly. Ak zmeníme polohu bodu *K* dostaneme ďalšie body paraboly. Množina všetkých priesečníkov je parabola.

Kužeľosečky ako množiny stredov kružníc

Je daný bod a kružnica, ktorá ňou neprechádza. Stredy kružníc, ktoré sa danej kružnice dotýkajú a prechádzajú daným bodom, tvoria kužeľosečku. Ak je daný bod vnútorným bodom danej kružnici, táto kužeľosečka je elipsou (obr. IV. 4. 5 a). Ak je vonkajším bodom, tak je hyperbolou (obr. IV. 4. 5 b). (Parabolu dostaneme ak za polomer kružnice zvolíme „nekonečnú“ dĺžku!)



obr. IV. 4. 5 a, b

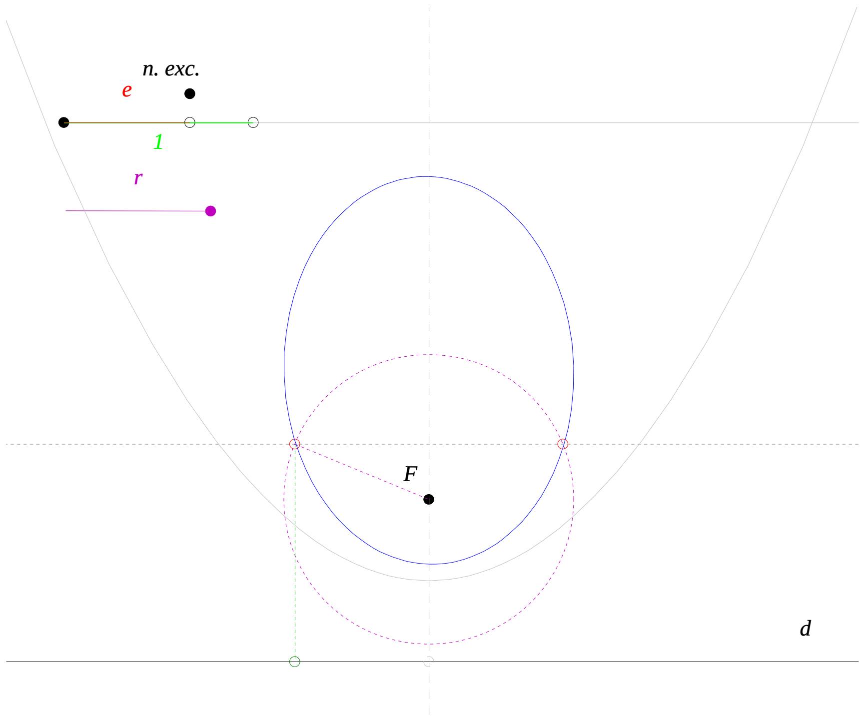
<u>Konštrukcia:</u> Zostrojíme ľubovolnú kružnicu k so stredom v bode S a od nej rôzný bod P neležiaci sa na tejto kružnici. Hľadáme tie stredy kružníc, ktoré prechádzajú daným bodom P a dotýkajú sa danej kružnice k. Zvolíme si ľubovolný bod M na kružnici a konštruujeme takú kružnicu, ktorá sa bude dotýkať kružnici k v tomto bode M a prechádzať bodom P. Hľadaný stred tejto kružnice leží na priamke určenej dotykovým bodom M a stredom S, má tú istú vzdialenosť od dotykového bodu ako od bodu P (o_{PM} - os úsečky PM). Ako prienik priamok SM a o_{PM} dostaneme jeden bod krivky. Celú množinu týchto bodov dostaneme ako stopu bodu pre ľubovolný bod kružnice.

<u>Kužeľosečky určené ako pomer vzdialeností od ohniska a určújúcej priamky</u>

Je daná určujúca priamka d a ohnisko F. Numerickou excentricitou (ε) sa označuje pomer vzdialeností bodu kužeľosečky X od ohniska a určújúcej priamky:

$$\varepsilon = \frac{|FX|}{|dX|} \qquad (1)$$

Množina bodov určená týmito údajmi je: elipsou, ak $\varepsilon < 1$; hyperbolou, ak $\varepsilon > 1$ a parabolou, ak $\varepsilon = 1$.



obr. IV. 4. 6

Konštrukcia:

Zostrojili sme kružnicu so stredom F a polomerom r a rovnobežku s určujúcou priamkou vo vzdialenosti l, aby pomer $r : l$ prislúchal podmienke (1). Množina priesečníkov kružnice a rovnobežky pre každú vyhovujúcu hodnotu polomeru r nám určuje kužeľosečku.

Projektívna definícia kužeľosečky (Steiner)

Nech A, B sú rôzne body, $\pi : Z(A) \rightarrow Z(B)$ je projektivita (ktorá nie je perspektivita). Množina všetkých bodov, ktoré incidujú súčasne s priamkou m a s priamkou $\pi(m)$ je (regulárna) kužeľosečka. ($Z(A)$ označujeme zväzok priamok prechádzajúci cez bod A.)

Konštrukcia 1

Podľa definície zvolíme si zodpovedajúci zväzok priamok $Z(A) \rightarrow Z(B)$. Priamky zo zväzku bodu A označíme ako a_i, body zo zväzku B ako b_i, tak s trojicou zodpovedajúcich priamok:

$a_1 \rightarrow b_1$ (oranžové)

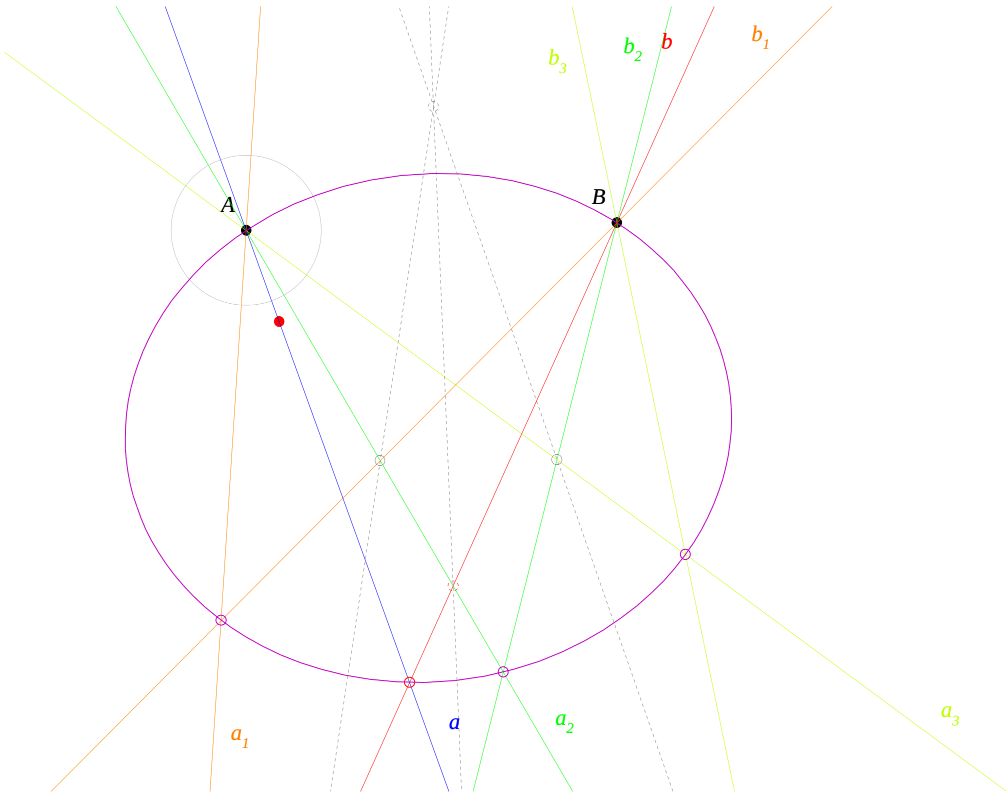
$a_2 \rightarrow b_2$ (žlté)

$$a_3 \rightarrow b_3 \text{ (svetložlté)}$$

je jednoznačne určená projektivita $Z(A) \rightarrow Z(B)$. Projektívny obraz priamky a (modrá) zo zväzku bodu A je priamka b (červená) zo zväzku bodu B, ktorú zostrojíme s využitím toho, že priamky:

$$(a_1 \cap b_2).(a_2 \cap b_1), \quad (a_2 \cap b_3).(a_3 \cap b_2) \quad \text{a} \quad (a \cap b_2).(a_2 \cap b)$$

sa prechádzajú jedným bodom (bodka medzi zátvorkami znamená spojenie prienikov – priamku; na obrázku sú tieto priamky označené ako sivé a prerušované). Priamka a však je ľubovolnou priamkou zo zväzku $Z(A)$, vieme ju zmeniť, ba aj animovať. Podľa definície priamky a a b je projektívne zodpovedajúca dvojica priamok, a ich priesečník opíše kužeľosečku, ktorá – ako to môžeme ukázať – prechádza bodmi A a B a bodmi $a_i \cap b_i$ ($i = 1, 2, 3$).

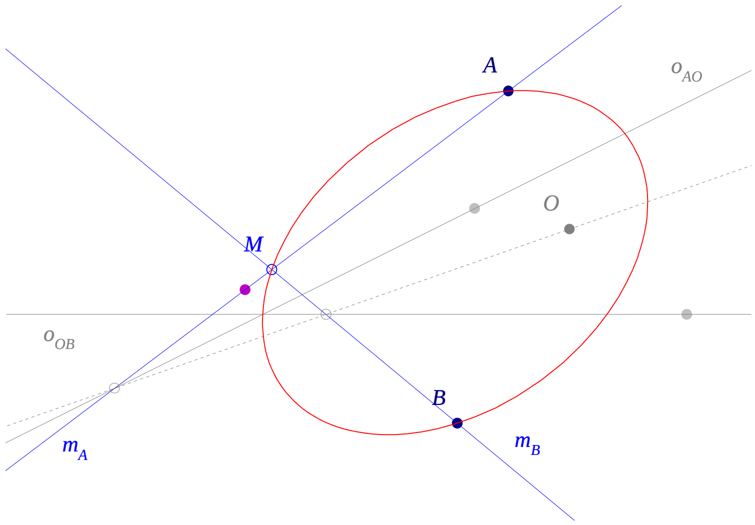


obr. IV. 4. 7

<u>Konštrukcia 2:</u>

Vhodnú projektívnosť sme dostali zložením dvoch perspektívnych korelácií π'_1 a π'_2 ($\pi = \pi'_2 * \pi'_2$). Transformácie $\pi'_1 : Z(A) \rightarrow Z(O)$ a $\pi'_2 : Z(O) \rightarrow Z(B)$ sú perspektívnosťami (perspektívnými koreláciami) dané osami o_{AO} resp. o_{OB}. K ľubovoľnej priamke m_A zo zväzku bodu A je priradená (jednoznačne!) priamka

m_B zo zväzku bodu B . Ich priesečníkom je bod M . Množina všetkých bodov M je hľadaná kužeľosečka.



obr. IV. 4. 8

V. OVEROVANIE VYUČOVANIA POMOCOU GEOMETRICKÝCH SOFTVÉROV (VÝSKUM)

„Úlohou učiteľa je skôr vytvárať podmienky na poznávanie, než vykladať hotové znalosti… Najvhodnejším spôsobom, ako niečo rýchle naučiť, však znamená robiť určitú skutočnú prácu s niekým, kto má už potrebné znalosti a skúsenosti… Preto uznávam obe cesty, konštruktívnu i inštruktívnu. Správne je udržovať medzi týmito smermi rovnováhu.“

Seymour Papert*: The Connected Family, 1996*

Na základe teoretických poznámok bol uskutočnený výskum v oblasti vyučovania pomocou geometrických softvérov. V tejto činnosti boli podrobnejšie overované interaktívne geometrické programy (Cabri Geometria II. a Euklides). Metodológia výskumu bola vypracovaná a realizovaná podľa literatúry z teórie pedagogického výskumu ([7], [16], [23], [24] a [25]).

V. 1. STRUČNÁ CHARAKTERISTIKA VÝCHODISKOVÝCH PODMIENOK

V nasledujúcich podkapitolách je opísaná podrobná dokumentácia dvoch výskumných projektov. Obidva boli zamerané na **použitie geometrických softvérov vo vyučovaní geometrie** s užším zameraním na konštrukčnú oblasť geometrie. Líšia sa len v metóde výskumu, v úrovni škôl (ZŠ – SŠ) a v používanom softvére (Cabri - Euklides).

Vzhľadom na to, že sa v obidvoch projektoch zúčastnil pomerne malý počet žiakov, namiesto štatistického spracovania uprednostňuje skôr hĺbkovú (kvalitatívnu) analýzu jednotlivých vyučovacích hodín so zhrnutím a komentárom pozorovaných skúseností.

Hlavnými dôvodmi už spomínanej malej vzorky boli:

1) fakt, že osobnosť učiteľa má veľmi silný vplyv na žiakov a na efektivitu vyučovacieho procesu [10],

2) organizačný charakter realizácie projektu (hardvérové a softvérové vybavenie).

V. 2. PROBLEMATIKA

Ako to už bolo opísané v prechádzajúcich kapitolách, ide o pomerne novú problematiku, čo je vlastne zapríčinené vývojom počítačovej grafiky. Teoretická časť problematiky bol sumarizovaný v prvej časti tejto práci.

Literatúra k tejto problematike ešte nemá renomovaný odborný časopis, viac-menej sa nachádza na Internete. Na Slovensku sa touto problematikou aktívne zaoberá len malá skupina odborníkov.

Počítačom podporované vyučovanie matematiky sa dostalo do priameho vyučovacieho procesu len na málo miestach. Dôvodom toho je, že na viacerých miestach nepoznajú tieto možnosti, alebo nemajú zabezpečené potrebné podmienky. Ďalšie argumentmi sú, že v tejto oblasti u nás vyšlo len pomerne málo hodnotných publikácií a neexistujú ani vhodné metodické príručky. Poznamenáme však, že v riešení tejto problematiky úspešne pracuje organizácia Infovek (zabezpečenie informatizácie školstva v SR) a Metodické centrum mesta Bratislava (kurzy pre učiteľov).

V. 3. CIELE VÝSKUMU

V nasledujúcich bodoch uvedieme všeobecné ciele oboch výskumných projektov (špeciálne ciele jednotlivých projektov spresníme pri ich hlbšom opise):

- Skúmať vzťah žiakov ZŠ a SŠ k vyučovaniu pomocou počítača (aké sú reakcie žiakov napr. na interaktívnosť geometrických konštrukcií) .
- Zbierať **skúsenosti z vyučovania** realizovaného pomocou uvedených softvérov (ťažkosti ovládania programov, čo je a čo nie je pre nich oproti našim očakávaniam problém, do akej miery sú schopní svoje myšlienky technicky zrealizovať …).

- Vyskúšanie alternatívnych vyučovacích metód ako napr. **problémové vyučovanie** alebo **skupinová práca**.
- Na základe získaných skúseností metodicky prepracovať vhodne vybraté tematické celky vo forme **metodickej príručky.**
- Overiť použiteľnosť uvedených programov a pracovného materiálu priamo vo vyučovacom procese.
- Zhrnúť skúsenosti, upozorniť na problémové situácie.

Ako je to vidno z načrtnutých cieľov, zmyslou práce nebude len skonštatovanie dosiahnutých výsledkov a skúseností, ale aj priamy produkt: pracovný materiál, ktorý je v súlade s učebnými štandardami matematiky a teda je priamo aplikovateľný vo vyučovaní geometrie.

V. 4. VÝCHODISKOVÉ HYPOTÉZY

Na základe teoretických úvah o vyučovaní pomocou interaktívnych geometrických softvérov predpokladáme, že počítačom podporované vyučovanie:

- Pozitívne motivuje žiakov.
- Pomáha žiakom vo vývoji geometrického myslenia, lebo lepšie pochopia súvislosti medzi geometrickými poznatkami.
- Privedie žiakov k samostatnej práci a experimentovaniu v geometrii.

V. 5. VÝSKUMNÉ METÓDY

Boli realizované dva výskumné projekty. V obidvoch projektoch bola použitá experimentálna metóda zameraná na meranie efektívnosti počítačom podporovaného vyučovania:

- Prvý projekt bol zameraný na učivo geometrie základnej školy a pri práci bol používaný geometrický softvér Cabri Geometria II. K tomuto výskumu sme vybrali metódu, ktorá je najbližšie k pozorovaniu, avšak objavili sa v nej aj prvky experimentovania.

- Druhý projekt bol zameraný na učivo stredných škôl/gymnázií a požívali sme geometrický softvér Euklides. V tomto výskume sme použili experiment s predtestom a posttestom.

Obidva výskumné projekty boli naplánované na jeseň 2002. Pred realizáciou však bol uskutočnený **predvýskum** na jar roku 2002. Organizačná forma tohto výskumu bola v podobe poobedňajšieho počítačového krúžku matematiky. Zúčastnila sa ho malá výberová skupina (~15) žiakov zo základnej školy na Vajanského ulici v Nitre. Skupinu tvorili dobrovoľne prihlásení žiaci z rôznych tried (6 až 9). Stretnutia sa uskutočnili každý druhý týždeň od marca do konca mája. V práci sme používali geometrický softvér Cabri Geometria II. Za metódu výskumu sme vybrali neštruktúrované pozorovanie [7].

Hlavnými cieľmi pozorovania boli:

- Do akej mieri sú žiaci schopní ovládať vybraný softvér.
- Nakoľko sú žiaci otvorení vzhľadom na ponímanie konštrukcie ako niečoho zmeniteľného, interaktívneho.
- Ako sú schopní pochopiť učivo geometrie a previesť ho do interaktívnej podoby.

Základné skúsenosti použitia geometrického softvéru a výnos predvýskumného pozorovania môžeme zhrnúť v nasledujúcich bodoch:

1) Samotné ovládanie programu pre žiakov nerobil problém, po inštruktáži učiteľa, resp. po ukážke boli schopní realizovať jednotlivé zadávané pokyny.
2) Podstatu interaktívnosti konštrukcie žiaci pochopili, tvorba zmeniteľných obrázkov sa im páčila, avšak nedostatky uvedomenia hlbších súvislostí (napr. univerzálnosť: ak chceme zostrojiť priamku kolmú na danú priamku, tak to musí byť **vždy** kolmica na každú polohu danej priamky) sa prejavili aj po niekoľkých hodinách.
3) Pri prevedení myšlienok súvisiacich s riešením úlohy do prostredia daného softvéru sme zistili ťažkosti. Na riešenie geometrických úloh (matematických

problémov) existuje všeobecný model [19], podľa ktorého môžeme tento proces rozdeliť na 4 etapy: rozbor, tvorba plánu (nápad), realizácia plánu a diskusia riešenia. Problém nastal medzi druhou a treťou etapou, keď žiaci už mali nápad ako úlohu riešiť, ale nevedeli svoju myšlienku prekonvertovať do „metaprostredia" programu, a preto nevedeli ani realizovať plán a dostať riešenie, hoci navrhnutý plán bol správny. Zdôraznili by sme, že problém nespočíval v nedostatkoch ovládania programu. Čiastočne to mohlo byť spôsobené nedostatkami alebo deformáciou geometrických poznatkov, ale predpokladáme, že hlavným dôvodom bola chýbajúca kreativita a predstavivosť! Naším cieľom v tejto oblasti v nasledujúcich projektoch bolo prekonať tieto ťažkosti s dostatočným počtom riešení vhodných úloh.

4) Počas pozorovania sme úplne neočakávane zistili veľmi dôležitý **typický zdroj chýb,** na ktorý by sme chceli upozorniť používateľa. Naším cieľom pri používaní počítača je tvorba univerzálnych konštrukcií, pomocou ktorých vieme ukázať všeobecnú platnosť vety alebo vyšetriť počet riešení. Problém nastáva a spočíva vo zvyklostiach pri ponímaní „klasickej" (papier, pravítko a kružidlo) a „interaktívnej" (geometrický softvér) geometrie/konštrukcie. Objasníme to na príklade: pri klasických konštrukciách, ak chceme zostrojiť priamku, ktorá prechádza dvoma bodmi, tak priložíme k týmto bodom pravítko a nakreslíme čiaru. To isté s geometrickým softvérom spravíme tak, že po vybratí možnosti „priamka" klikneme najprv na prvý bod, potom na druhý. Ak zmeníme polohu týchto bodov, tak sa so zmenou polohu bodu zmení aj poloha nakreslenej priamky. S použitou Cabri Geometriou II sa však dá zostrojiť priamka aj tak, že klikneme na prvý bod a s druhým kliknutím zadáme smer priamky. V tomto prípade sa môže stať, že priamka vizuálne prechádza druhým bodom, ale v skutočnosti tomu tak nie je. Zistíme to zmenou polohy jedného určujúceho bodu. Keďže každá konštrukcia je reťazec krokov, stačí nám urobiť takúto chybu len v jednom kroku a dôsledkom toho celá konštrukcia (aspoň v interaktívnom ponímaní) je pokazená. Keď sa nad touto problematikou zamyslíme hlbšie, zistíme, že koreň nájdeme v chápaní geometrických konštrukcií – predstavujeme si ich

ako postupné kreslenie rovných čiar a kružníc, alebo ako logický reťazec spojenia abstraktných geometrických pojmov a súvislostí?

Skúsenosti a výsledky pozorovania sme zohľadnili aj pri tvorbe pracovného materiálu a pri realizácií nasledujúcich výskumných projektov.

V. 6. POPIS PRACOVNÉHO MATERIÁLU S NÁZVOM:

Použitie programu Cabri vo vyučovaní geometrie na základných školách

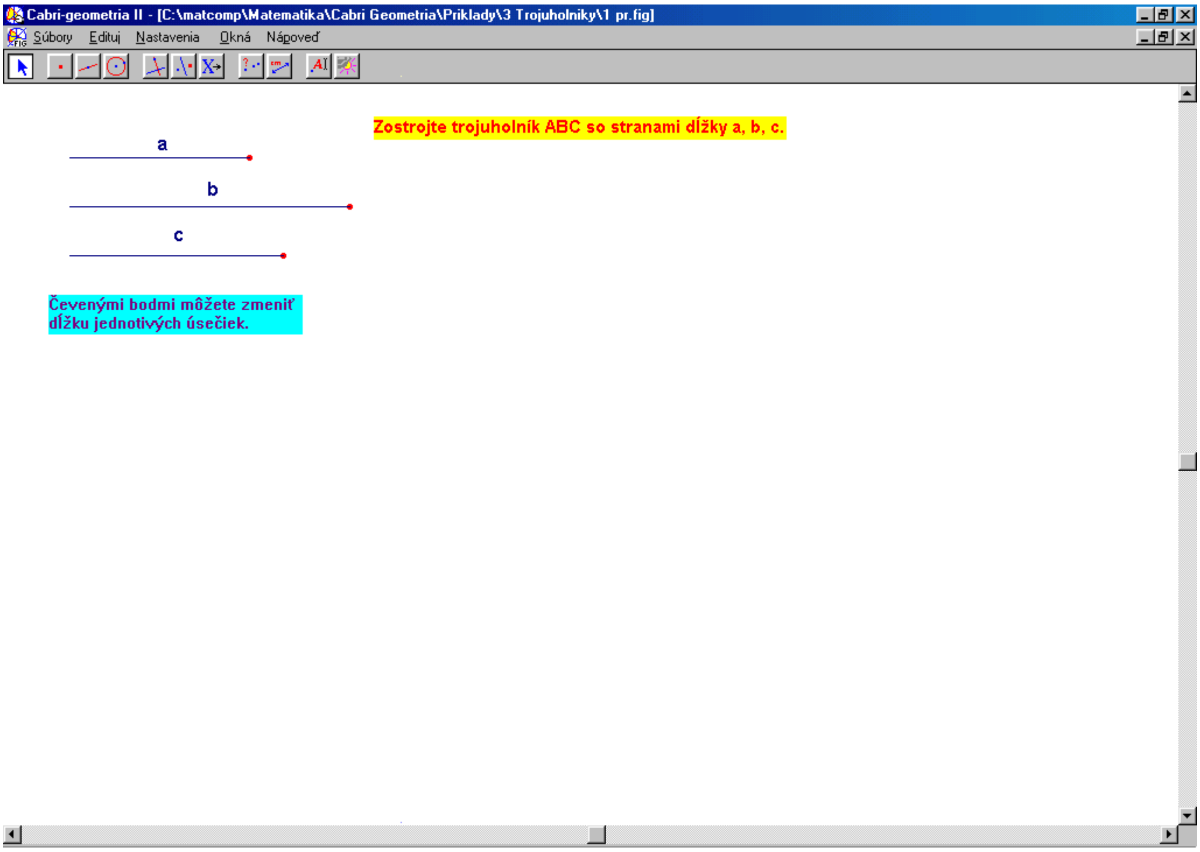
Tento materiál je produktom našej výskumnej a experimentátorskej činnosti a je priamo aplikovateľný vo vyučovacom procese. Obsahuje metodicky spracovanú zbierku úloh a ukážok z konštrukčnej časti učiva geometrie na ZŠ v prostredí softvéru Cabri Geometria II.

Materiál sa skladá z dvoch časti: z tlačenej príručky pre učiteľov a z priloženého multimediáneho CD nosiča. Materiál bol vypracovaný v rámci riešenia medzinárodného projektu Matcomp (Applications of Information and Communication Technology in Teaching and Learning Mathematics) v spoluautorstve: Peter Csiba, Dušan Vallo, Soňa Čeretková v roku 2002. Bol prezentovaný učiteľom matematiky zo základných škôl okolia Nitry v auguste 2002 na workshope v rámci uvedeného projektu.

Materiál obsahuje okrem inštruktážnych pokynov (ovládanie programu, nastavenia slovenského jazyka a špeciálneho prostredia v Cabri) sadu úloh a ukážkových príkladov s obrázkami a podrobnými návodmi na riešenie resp. s komentármi. Tlačená verzia má 79 strán a obsahuje 77 príkladov v siedmich tematických okruhoch.

Organickou časťou materiálu je priložený CD nosič, lebo obsahuje všetky príklady, ktoré sú opísané v príručke. Samotná príručka je prakticky nepoužiteľná bez príkladov zadaných v programe Cabri. Učiteľ, resp. používateľ môže z CD-čka zadania týchto príkladov (aj vzorové riešenia) prekopírovať alebo pomocou samorozbaľovacieho archívu nainštalovať do počítača. Zadania príkladov sa nachádza v štandardných Cabri súboroch (*.fig).

Opíšeme stručne všeobecnú štruktúru týchto zadaní a objasníme ich na konkrétnom prípade. Vybrali sme si na to prvú úlohu tretej kapitoly, ktorá sa zaoberá s trojuholníkmi. Ak otvoríme príslušný súbor, objaví sa nám takéto okienko:



obr. V. 6. 1

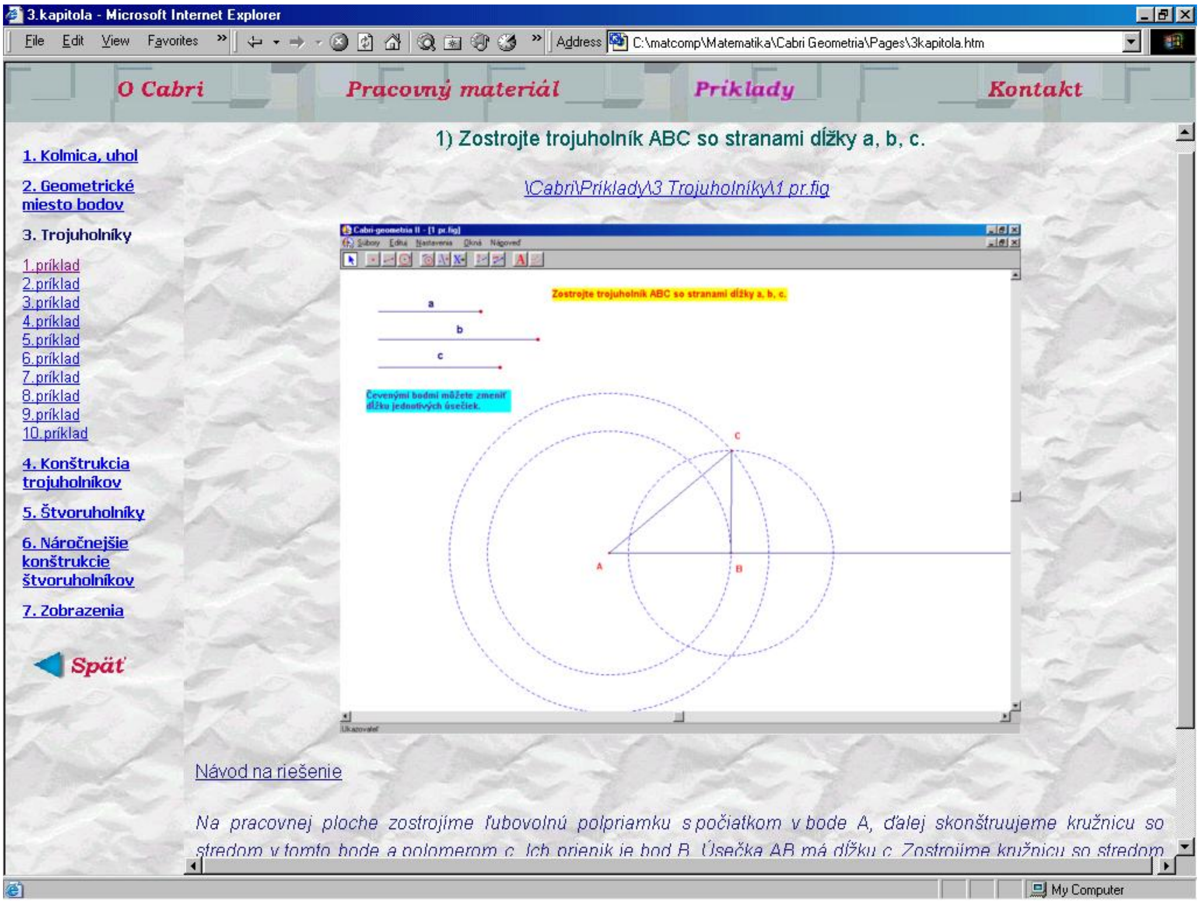
V žltom textovom políčku s červeným písmom sa nachádza textové zadanie úlohy, v našom prípade je to: **Zostrojte trojuholník ABC so stranami dĺžky a, b, c.**

Vedľa toho nájdeme aj geometrické zadanie úlohy, čo je reprezentované s troma interaktívne zmeniteľnými úsečkami, ktoré sú pomenované ako *a*, *b* a *c*.

Na možnosť zmeny dĺžok jednotlivých úsečiek upozorňuje používateľa v modrom textovom políčku inštruktážny pokyn: **Červenými bodmi môžete zmeniť dĺžku jednotlivých úsečiek.**

Celá zbierka je zostavená v tomto ponímaní a s podobnou filozofiou (samozrejme, v ukážkových príkladoch nájdeme len príslušné inštruktážne pokyny).

Vyučujúci nájde návod na riešenie daného príkladu v príručke alebo na CD nosiči. CD obsahuje okrem textu tlačenej verzie (v formátoch *.doc* a *.pdf*), aj elektronicky prepracovanú formu príručky, ktorá sa dá internetovými prehliadačmi (napr. Internet Explorer®) otvoriť a používať pomocou hyperlinkových odkazov. Na jednotlivých stránkach tejto verzie sa nachádzajú okrem zadania úlohy a obrázku aj dve odkazy: s jedným otvoríme príslušný Cabri súbor so zadaním, s druhým súbor so vzorovým riešením. (Priamo vo vyučovaní však neodporúčame používať túto verziu, lebo žiaci by mohli zneužiť napísaný návod.)



obr. V. 6. 2

K uvedenému príkladu prislúcha v príručke takýto **návod** (uvedieme kvôli úplnosti príkladu):

Na pracovnej ploche zostrojíme ľubovoľnú polpriamku s počiatkom v bode *A*, ďalej skonštruujeme kružnicu so stredom v tomto bode s polomerom *c*. Ich prienik je bod *B*. Úsečka *AB* má dĺžku *c*. Zostrojíme kružnicu so stredom v bode *A* a s polomerom *b* a kružnicu so stredom v bode *B* a s polomerom *a.* Prienik posledných dvoch kružníc je vrchol *C.* Vyznačíme hranicu trojuholníka *ABC.* (možnosti: „Úsečka“, „Trojuholník“, „Mnohouholník“)

Zhodné trojuholníky považujeme za jedno riešenie.

Zmenou dĺžok úsečiek *a, b, c* meníme tvar trojuholníka.

Pracovná časť materiálu, t.j. zbierka príkladov je členená podľa tematických okruhov do siedmich kapitol.

Prvá a druhá kapitola (**Kolmica, uhol** a **Geometrické miesto bodov**) sa zaoberá základnými (euklidovskými) konštrukciami, so zavedením a použitím geometrických miest bodov.

Tretia kapitola (**Trojuholníky**) je venovaná vlastnostiam trojuholníka, ako napr. skonštruovateľnosť, významné prvky trojuholníka, súčet vnútorných uhlov a zostrojenie trojuholníka, ak sú dané jeho strany, resp. vnútorné uhly.

Štvrtá kapitola (**Konštrukcia trojuholníkov**) je venovaná konštrukciám trojuholníka pomocou geometrického miesta bodov (zostrojenie trojuholníka, ak sú dané jeho strany, výšky na dané strany, ťažnice, resp. vnútorné uhly).

Piata kapitola (**Štvoruholníky**) sa zaoberá zostrojením špeciálnych štvoruholníkov (štvorec, obdĺžnik, kosoštvorec, kosodĺžnik) na základe vlastností týchto útvarov. V následnej šiestej kapitole (**Náročnejšie konštrukcie štvoruholníkov**) uvádzame konštrukciu rovnobežníkov a lichobežníkov s použitím hlbších súvislostí (napr. zo zadaných strán a výšok).

Siedma kapitola obsahuje krátky úvod do geometrických transformácií na úrovni ZŠ, t.j. zaoberá sa s osovou a stredovou súmernosťou.

V nasledujúcich dvoch kapitolách sa zaoberáme s podrobnou dokumentáciou výskumných projektov.

VI. VÝSKUMNÝ PROJEKT 1

(EUKLIDOVSKÉ KONŠTRUKCIE POMOCOU SOFTVÉRU CABRI NA ÚROVNI ZŠ)

Projekt bol zameraný na skúmanie základných euklidovských konštrukcií na počítači pomocou geometrického softvéru Cabri Geometria II. Pod pojmom euklidovské konštrukcie rozumieme konštrukcie, ktoré môžeme zostrojiť len pomocou kružidla a lineáru.

Podľa platných učebných osnov a štandardov sa žiaci s geometriou stretnú už na prvom stupni základnej školy. Žiaci piateho ročníka preberú (preopakujú) základné pojmy geometrie od abstrahovaného pojmu bodu a priamky až k práci s uhlami. Pri hľadaní polovice uhla (konštrukčne) ešte ani nevedia, že používajú geometrické miesto bodov; v 8. ročníku, pri preberaní učiva nazvaného ako geometrické miesto bodov, ktoré sa zdá väčšine žiakov už ako abstraktné, ťažké a nepredstaviteľné, si už ani nespomenú, že osi uhla si už raz konštruovali ako polovicu uhla.

K riešeniu výskumného projektu sme použili prvú a druhú kapitolu už spomínaného pracovného materiálu s názvom: „Použitie programu Cabri vo vyučovaní geometrie na základných školách (oblasť konštrukčných úloh)". Tieto kapitoly (**Kolmica, uhol** a **Geometrické miesto bodov**) majú výnimočné postavenie v tejto materiáli, nakoľko v sebe zahŕňajú čisto euklidovské konštrukcie, ktorých zvládnutie rozvíja poznatkovú štruktúru v oblasti geometrie. K týmto kapitolám je odporúčané použiť špeciálne prostredie programu, v ktorom má používateľ prístup len k základným konštrukčným možnostiam. Program Cabri umožňuje vytvoriť používateľovi (učiteľovi) vlastné prostredie, v ktorom je zmenený panel nástrojov: isté ikony sú odstránené, druhé premiestnené, ale môžeme do programu aj dodať nové (napr.: pripravené makrokonštrukcie). Takto vytvorené špeciálne prostredie môžeme uložiť do súboru (dostane príponu *.men*); otvorením tohto súboru sa nám otvorí program Cabri s nastaveným panelom nástrojov.

Používali sme špeciálne prostredie programu, v ktorom používateľ (žiak) má prístup len k základným konštrukčným možnostiam: **Bod** (ľubovolný, na útvare a priesečník)**, priamka, polpriamka, úsečka, kružnica** a **kružnica s daným polomerom**. Ďalšie možnosti, ako napríklad formátovanie atribútov, meranie a pod., pôvodného prostredia zostanú viac-menej nezmenené, resp. ku konštrukciám týchto kapitol sú postačujúce vyššie uvedené konštrukčné možnosti a s nimi uskutočnené konštrukcie sú v plnej miere euklidovské. Pomocou použitia týchto základných (euklidovských) konštrukcií, ako to vyplýva z teórie, sme schopní vybudovať celý potrebný aparát geometrických konštrukcií.

Ako sa ukázalo aj počas predvýskumu zostrojenie kolmice pomocou euklidovských základných krokov (v špeciálnom prostredí Cabri.men) bola veľmi ťažká úloha nielen pre žiakov základnej školy, ale aj pre poslucháčov 4. ročníka učiteľských aprobácií s matematikou. Dôvodom toho je pravdepodobne to, že zatiaľ sa s takými problémami nestretli; na zostrojenie kolmice používali trojuholníkové pravítko „s ryskou". Veľmi nepriaznivý obraz dostaneme o súčasnom stave geometrickej predstavivosti a úrovni abstrakcie u žiakov cca 14 ročných, keď nevedia pomocou kružidla (kružnica – už ako geometrické miesto bodov je obsahom učiva 8. ročníka ZŠ) zostrojiť ani kolmicu k danej priamke prechádzajúcu daným bodom. Spomenuté kapitoly pracovného materiálu slúžia, alebo môžu slúžiť na „liečenie" horeuvedeného handicapu.

Myslíme si, že dôkladné porozumenie elementárnym euklidovským konštrukciám značne kladne ovplyvní pojmotvorný proces geometrie.

Hlavné ciele výskumu boli: skúmať vzťah žiakov k vyučovaniu pomocou počítača s dôrazom na problematiku elementárnych euklidovských konštrukcií, vyskúšať aplikovateľnosť navrhnutej metódy a pracovného materiálu; zbierať skúsenosti z vyučovania pomocou uvedeného softvéru (aké sú reakcie žiakov vzhľadom na interaktívnosť geometrických konštrukcií, aké problémy nastávajú pri ovládaní programu, kde sa vyskytli oproti našim očakávaniam ťažkosti a do akej miery sú študenti schopní svoje myšlienky prakticky zrealizovať).

Termín konania: 9. 9. – 21. 10. 2002

Miesto konania: počítačová miestnosť Katedry matematiky FPV, UKF v Nitre.

Účastníci: žiaci 4. ročníka (trieda 4. c) osemročného gymnázia na Golianovej ulici v Nitre

Spôsob realizácie: v rámci poobedňajšieho nepovinného krúžku

Metóda výskumu: pozorovanie (s prvkami experimentu) [7]

Oblasti učiva: elementárne konštrukcie a geometrické miesta bodov (množiny bodov danej vlastnosti), pohyb

K pozorovaniu bolo venovaných 6 stretnutí po cca 75 - 90 minút za týždeň v rámci záujmového krúžku. Výber študentov prebiehal na základe dobrovoľnosti.

Poznamenali by sme, že chlapci mali oveľa väčší záujem o vyučovanie pomocou počítača.

1. STRETNUTIE

Na úvodnej hodine sme sa zaoberali ovládaním programu. Vyskúšali sme skoro všetky ovládacie, konštrukčné, pomocné prvky a formátovacie možnosti programu.

Ukázali sme všeobecné princípy zadávania základných geometrických objektov: body, priamky, úsečky, kružnice; „pomocné" konštrukčné možnosti, pomocou ktorých sme schopní zostrojovať napríklad kolmicu, rovnobežku a kružnicu s polomerom. Ukázali a vyskúšali sme, ako vieme vymazať jeden objekt alebo viac objektov naraz. Kvôli prehľadnosti konštrukcie je veľmi užitočná aj možnosť skrytia objektov. Vyjasnili sme rozdiel medzi zmazaním (vyznačíme objekt a v podmenu Edituj vyberieme položku Zmaž, alebo stlačíme kláves Del) a skrytím (v poslednom stĺpci ikôn vyberieme možnosť Skry/Ukáž a vyznačíme objekt). Vymazaný objekt nám totiž zmizne natrvalo spolu so všetkými ostatnými prvkami konštrukcie, ktoré s ním boli v súvislosti (ak vymažeme stred kružnice, zmizne aj kružnica, zmiznú aj jej priesečníky, resp. body zvolené na kružnici a všetky tie konštrukcie, ktoré boli definované pomocou vymazanej kružnice). U skrytých objektov k tomu vôbec nedôjde, jednoducho vybraný objekt (len) nebude viditeľný. S objektmi, ktoré boli viazané so skrytým objektom, môžeme pracovať ďalej bez problémov. V tejto súvislosti sme povedali, ako môžeme posledne uskutočnený krok vrátiť späť (v podmenu Edituj položka Vráť), a u skrytých objektov ich späť zviditeľniť (slúži na to tá istá ikona).

Cabri Geometria dovoľuje používateľovi v niektorých prípadoch zadávať tie isté objekty rôznymi spôsobmi. Napríklad priamku môžeme zadať ako priamku, ktorá prechádza dvoma už danými bodmi, alebo zadáme určujúci bod, ktorým má priamka prechádzať a s druhým kliknutím na plochu určíme smer priamky. Ak dané objekty zadáme rôznymi spôsobmi, tak aj manipulácia s nimi bude rôzna. Konkrétne: v prvom prípade, keď priamka je zadaná dvoma bodmi, kliknutím na priamku ju môžeme premiestňovať na ploche tak, že priamka v zmenenej polohe bude rovnobežnou s pôvodným smerom. Smer priamky môžeme zmeniť, ak vyberieme (ikona Ukazovateľ) a premiestnime ich určujúce body. V druhom prípade práve naopak, s vybratím priamky sme schopní zmeniť jej smer a s vybratím určujúceho bodu ju presúvame rovnobežne s pôvodným umiestnením. Podobná situácia nastane aj pri kružnici, ku ktorej v obidvoch prípadoch ako prvé musíme zadať stred kružnice, potom „ťaháme“ kurzor (polomer) ďalej. S druhým kliknutím kružnicu fixujeme. Ak sme v druhom kroku vybrali už existujúci bod, polomer kružnice môžeme meniť len premiestňovaním tohto bodu a manipuláciou kružnice pomocou myšky premiestňujeme celú kružnicu (aj so stredom). Ak v zadávaní kružnice v druhom kroku klikneme na ľubovolné miesto, objaví sa opäť kružnica, avšak manipulácia s ňou bude odlišná od prechádzajúcej. Vyznačením kružnice vieme zmeniť polomer kružnice a s premiestnením stredu zmeníme polohu, pričom polomer zostáva nezmenený. Takéto duálne zadávacie elementy sa nachádzajú ešte aj pri polpriamkach. V ostatných prípadoch je zadanie útvarov z manipulačného hľadiska jednoznačné. Vyššie opísané vlastnosti – dualita ovládania – sú potrebné k efektívnej a plnohodnotnej práci s programom. Preto sme sa s ním zoberali aj prakticky: vyskúšali sme ich všetky.

Z metologického hľadiska ťažiskom stretnutia bolo zavedenie a ilustrácia pojmu interaktívnosť. Žiaci totiž hneď na začiatku pochopili, že pomocou programu vieme zmeniť už nakreslené obrázky. Pre nás, z pohľadu geometrie sú však oveľa dôležitejšie pravidlá, podľa ktorých sa menia tvary zostrojených objektov.

K interaktívnej konštrukcii je potrebné dopredu pripraviť logický reťazec konštrukcie a dodržať viazanosť jednotlivých po sebe idúcich krokov. V tomto spočíva totiž veľký rozdiel oproti klasickým metódam. Ak chceme napr. cez niektorý bod viesť priamku, musíme na bod „presne“ kliknúť (presnosť teraz chápeme v takom zmysle, že program má zobraziť text: **týmto bodom**, alebo pod.; v programe sa citlivosť takéhoto charakteru dá zmeniť). Ak zostrojíme takú priamku, ktorá len vizuálne prechádza daným bodom (pri klasických metódach sme na to zvyknutí), stratíme interaktivitu konštrukcie.

Hoci sme sa dosť podrobne zaoberali aj s touto problematikou, chyby v interaktívnosti sa prejavili ešte aj po niekoľkých stretnutiach.

Domnievame sa, že sa nachádza súvislosť aj medzi estetickým cítením jedinca a jeho geometrickou predstavivosťou. Pomocou programu sme schopní zmeniť atribúty objektov: označenie bodu (kruh rôzneho polomeru, krúžok, krížik); farba, hrúbka a štýl čiar (15 farieb, 3 hrúbky, plná a dva štýly bodkovaných čiar); vyfarbenie uzavretých objektov (trojuholník, n-uholník, kružnica). Vhodnou zmenou atribútov sa môže stať zostrojený obrázok oveľa prehľadnejší. Počas tohto stretnutia sme ukázali aj to, ako vieme tieto atribúty zmeniť.

Kvôli záujmu žiakov sme ukázali aj základ analytickej časti programu – súradnicovú sústavu, o ktorú žiaci prejavili záujem.

Ostatným možnostiam programu sme nemohli venovať priestor z dôvodu časového ohraničenia stretnutia. Istými možnosťami programu sme sa zaoberali ešte počas kurzu, ale zaviedli a ukázali sme ich priamo v tej chvíli, keď sa ich použitie stal nevyhnutným. Dôvodom bol aj fakt, že sme nechceli na začiatku žiakov „utopiť“ v zbytočnom množstve informácií. Niektoré ďalšie možnosti programu počas kurzu sme vôbec nepoužili, nakoľko ich náplň nesúvisela s načrtnutými problematikami.

2. STRETNUTIE

Už sme sa zaoberali s vytýčenými cieľmi pozorovania, s elementárnymi euklidovskými konštrukciami. V prvom rade bolo potrebné vysvetliť žiakom, čo budeme robiť, aká je vlastne problematika a ako ju budeme riešiť. Od tejto hodiny sme používali špeciálne nastavené prostredie programu, ktorý obsahoval len nutné základné konštrukčné možnosti (viď úvod tejto kapitoly). Žiaci si museli na tieto zmeny zvyknúť. Používané prostredie obsahuje len tri konštrukčné ponuky ikôn, v prvej sa nachádzali len body (ľubovolný bod, bod na útvare a priesečník), v druhej lineárne elementy (priamka, polpriamka a úsečka) a v tretej kružnice (kružnica a kružnica s polomerom).

Po prezretí umiestnenia ikôn sme sa spustili do práce. Postupovali sme podľa prichystanej zbierky, s 1. príkladom prvej kapitoly (súbory so zadaním boli umiestnené na počítačoch):

Zostrojte ľubovoľnú kolmicu na priamku AB !

Geometrické zadanie obsahovalo len jednu priamku, ktorá bola zadaná bodmi *A, B*. To znamená, že zmenou polohy niektorého z týchto bodov sme schopní zmeniť polohu samotnej priamky.

Chceli sme zostrojiť ľubovoľnú kolmicu na túto priamku tak, aby kolmica zostala kolmicou aj po zmene polohy bodov *A, B*. Takúto konštrukciu sme nazvali interaktívnou (univerzálnou) konštrukciou. U žiakov sa na túto vlastnosť (síce len o niečo neskôr) objavil ich vlastný termín flexibilnosť, ktorý (aspoň podľa nás) hoci úplne nepokryje celý obsah pojmu, ale svedčí o tom, že žiaci presne pochopili viazanosť medzi použitými elementmi.

Úloha sa zdala veľmi jednoduchá, ale ako sa ukázalo, nebolo tomu tak. Naším cieľom nebolo vysvetliť a ukázať riešenie hneď na začiatku, ale len usmerniť; povedať len to, čo musí platiť; alebo ukázať (s interaktívnou zmenou), prečo ich konštrukcia nie je správna. Žiaci pracovali buď samostatne alebo v menších skupinách. Komunikovali medzi sebou. Počas práce žiakov sa vyskytli dva dosť vážne problémy: s interaktivitou a s konštruovaním.

Prvý problém – interaktivita – spočíval v tom, že hľadaná priamka (kolmica):

a.) musí vždy existovať (pri predpoklade, že body *A* a *B* sú rôzne),

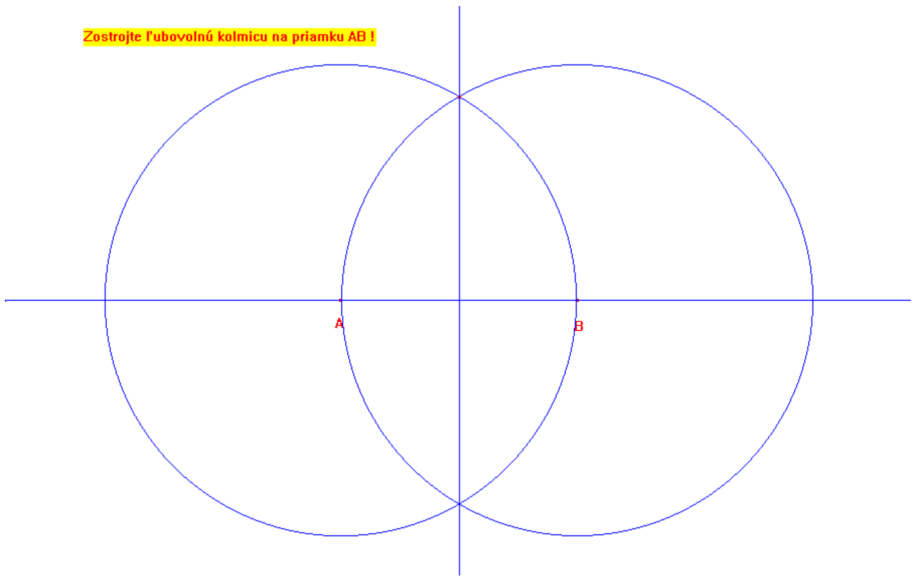
b.) musí byť vždy kolmou na priamku *AB*.

Na papieri je pri klasických metódach postačujúce zostrojiť dve kružnice, ktoré majú stred na danej priamke *AB* a majú dva priesečníky. Tieto priesečníky jednoznačne určujú jednu priamku, ktorá je na danú priamku kolmá. Odlišnosť pri počítačom podporovanej geometrii je to, že musíme zaručiť, aby vždy existovali dva rôzne priesečníky takýchto dvoch kružníc. To môžeme zabezpečiť rôznymi spôsobmi a asi najjednoduchší je nasledujúci:

> Zostrojíme najprv kružnicu so stredom v bode A, ktorá prechádza bodom B a analogicky zostrojíme aj kružnicu so stredom v bode B, prechádzajúcu bodom A. Vyznačíme priesečníky kružníc a zostrojíme priamku, ktorá nimi prechádza.

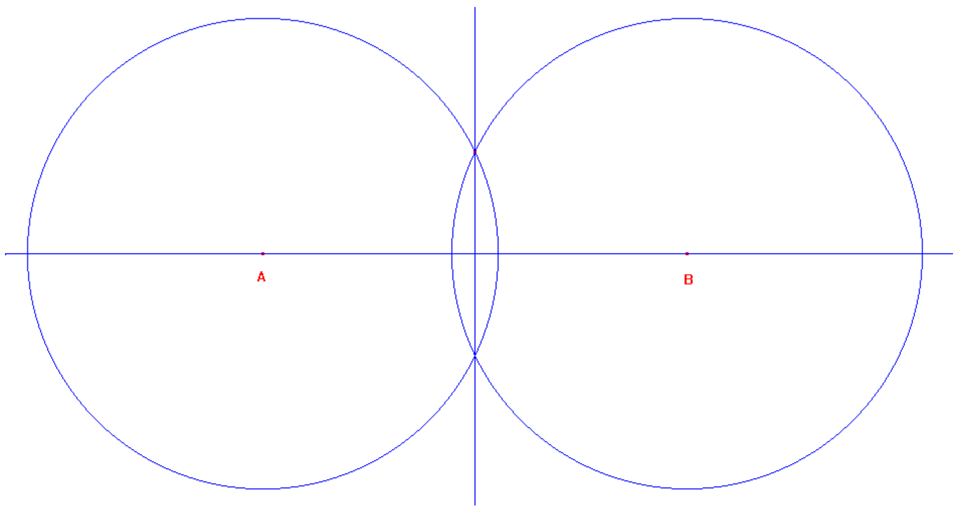
Ďalší problém v tejto súvislosti a vážny zdroj chýb spočíval v tom, že žiaci zostrojovali útvary pod silou vizuálneho dojmu: kružnice síce vizuálne prechádzali potrebnými bodmi, ale pri zmene polohy určujúcich bodov konštrukcia „rozpadla“.

Takto vyzerala konštrukcia, na prvý pohľad bezchybná:



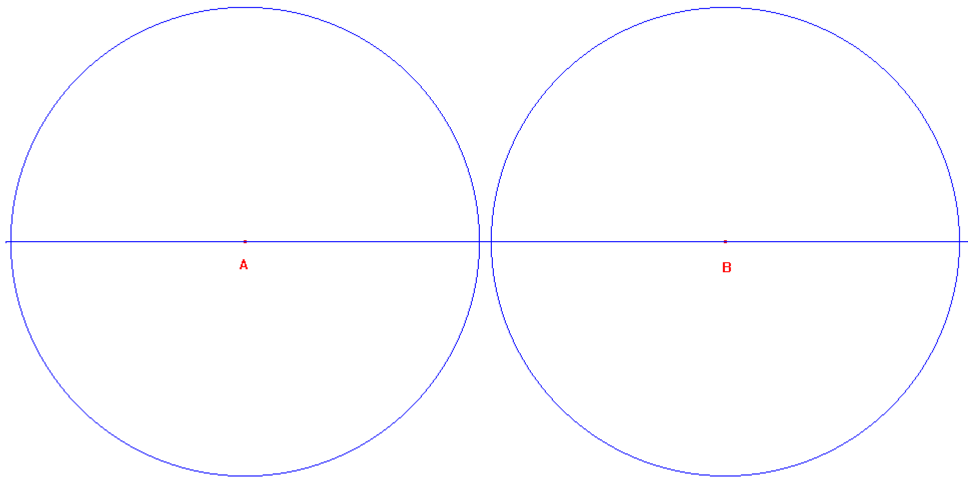
obr. VI. 1

po maličkej zmene – ešte stále sa zdala dobrou;



obr. VI. 2

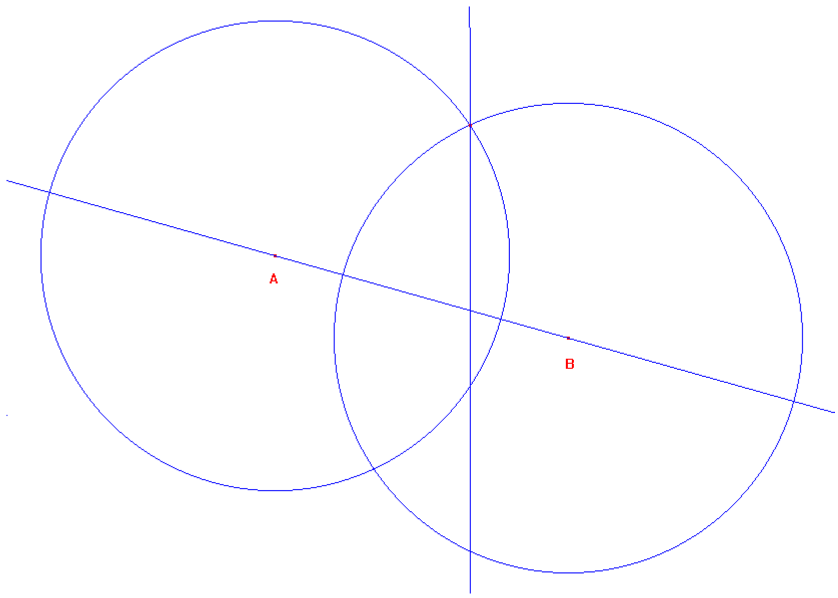
po väčšej zmene polohy bodu B:



obr. VI. 3

sme stratili priesečníky! Zmizla aj kolmica.

Dokonca konštrukcia má aj ďalšiu chybu:



obr. VI. 4

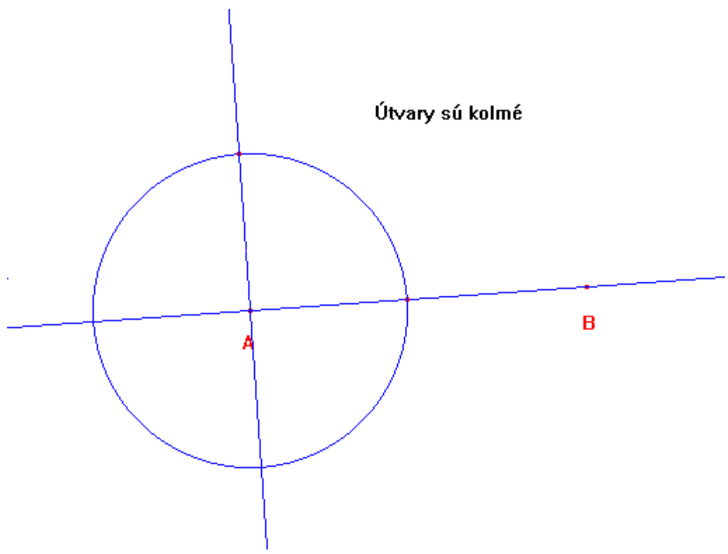
zostrojená „kolmica“ nie je ani kolmicou!

Žiaci sa dostali k načrtnutým problémovým situáciám. Skúšku univerzálnosti, ako vidno aj z prechádzajúcich obrázkov, realizujeme premiestňovaním určujúcich prvkov. Túto metódu testovania sme vedeli aplikovať aj v ostatných prípadoch. Preto ju ďalej žiaci používali už samostatne, ako všeobecnú kontrolu univerzálnosti konštrukcie.

Kontrolu istých vlastností sme realizovali aj pomocou zabudovaných možností programu. Pomocou kontrolných prvkov programu vieme určiť, či sú dané lineárne elementy na seba kolmé (resp. rovnobežné, alebo či bod leží na útvare).

Pomocou možnosti „Kolmý?“ sme vedeli overiť správnosť konštrukcie, v našom prípade, či je zostrojená priamka vždy kolmá na danú priamku *AB*.

Táto pomocná možnosť však zapríčinila ďalšiu chybu. Niektorí žiaci totiž pomocou tejto možnosti **nakreslili** v programe interaktívny obrázok, avšak nešlo o konštrukciu! Ide o to, že program Cabri si pri interaktívnych obrázkoch zapamätá určité pomery a pracuje s nimi: ak na priamke určenej dvoma bodmi zvolíme bod, pri zmene polohy priamky sa premiestňuje aj bod, a to tak, že incidencia a deliaci pomer sa vzhľadom na určujúce body nezmení. Podobná situácia je pri kružnici zadanej stredom a bodom polomeru. Ak zvolíme na takej kružnici bod, pri zmene obrázku sa incidencia bodu a uhol tých troch bodov (určujúci bod kružnice, stred a bod zvolený na kružnici) zostane invariantom. Skladaním uvedených dvoch krokov vieme nakresliť v programe takú priamku, ktorá s danou priamkou uzaviera určitý uhol nezávisle od zmeny polohy danej priamky. Pre tento uhol pomocou kontrolnej možnosti „Kolmý?“ alebo s meraním uhla sme schopní nastaviť priamku tak, aby bola kolmá na danú priamku.



obr. VI. 5

Takto nakreslený obrázok je plne interaktívny, avšak z hľadiska konštrukcie nemôžeme riešenie uznať za správne, lebo bola použitá zabudovaná „inteligencia“ programu a neobsahuje žiadne konštrukčné prvky! Za kreativitu sme pochválili žiakov, ale bolo veľmi ťažkou vysvetliť im, prečo to nie je „správne“ riešenie z konštrukčného hľadiska, hoci sme dostali konečne plne interaktívnu kolmicu.

V nasledujúcich úlohách sme potrebovali riešiť podobné príklady, s menšími modifikáciami v zadaní (2. príklad):

Bodom K zostrojte kolmicu na priamku AB. Bod K neleží na priamke AB.

Riešenie: treba zostrojiť len dve kružnice, ktoré prechádzajú bodom *K* a majú stredy na priamke *AB*. Ak sú tieto stredy rôzne, potom majú kružnice presne dva priesečníky. Preto a kvôli jednoduchosti za stredy kružníc môžeme zvoliť body *A* a *B*. Získané priesečníky určujú kolmicu, ktorá prechádza bodom *K*.

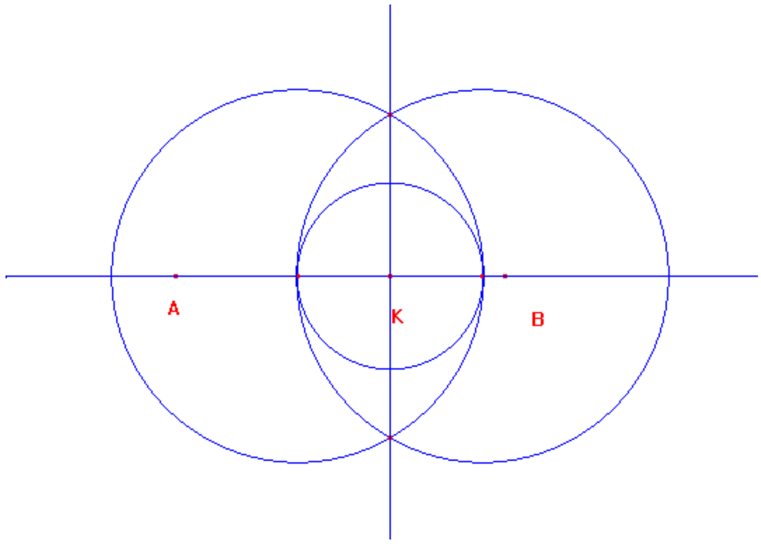
Žiakom riešenie tohto príkladu trvalo dlhšie, experimentovali v programe, skúšali riešenie pomocou zostrojenia veľkého množstva pomocných kružníc a priamok. Vyučujúci počas toho hral pasívnu rolu, len otestoval riešenia a povzbudzoval žiakov. Niektorí žiaci po dlhšom experimentovaní prišli na nami opísaný postup riešenia. Ukázali ho aj ostatným. Nechali sme ich vysvetliť postup vlastnými slovami. V tejto súvislosti pripomenieme, že nimi používaný metajazyk nebol skoro o nič efektívnejší než učiteľom používaná odborná terminológia.

Aj pri tejto úlohe došlo k chybám interaktívnosti, ale k už opísaným skúsenostiam nevieme dodať nové pozoruhodné informácie.

S modifikáciou textu zadania dostaneme 3. príklad:

Bodom K zostrojte kolmicu na priamku AB. Bod K leží na priamke AB.

Základná myšlienka riešenia je podobná ako v predchádzajúcich prípadoch. Je potrebné zostrojiť také dve kružnice, ktoré majú stredy na priamke *AB* a ich priesečníkmi určená kolmica prechádza bodom *K*. Na riešenie úlohy môžeme aplikovať prvý príklad: tam sme zostrojili os úsečky, ktorá pretne danú priamku v strede úsečky. Teda, ak na danej priamke AB nájdeme také body, že ich stredom bude bod *K*, už máme úlohu vyriešenú. To nie je až také ťažké: tieto body majú od bodu *K* tú istú vzdialenosť, čiže môžeme ich dostať ako priesečník danej priamky s ľubovolnou kružnicou so stredom v bode *K*.



obr. VI. 6

Riešenie tohto príkladu žiakom trvalo dlhšie, pokúsili sa nájsť univerzálne konštrukčné riešenie náhodným zostrojovaním väčšieho množstva pomocných kružníc a priamok. Podľa vyššie uvedeného návodu sme ich priviedli k riešeniu. Musíme však povedať, že učiteľove pomocné myšlienky obvykle boli dávkované žiakom tak, aby žiaci museli čo najviac vykonať z objavovania súvislostí. Návodné otázky a nápady boli adresované buď celej skupinke, alebo len jednotlivcom, na základe toho, ako sme to uznali za vhodnejšie. Vyučujúci tentokrát už musel aj aktívne vstúpiť do „hry" a pomáhať žiakom, pretože boli očividne na hranici trpezlivosti.

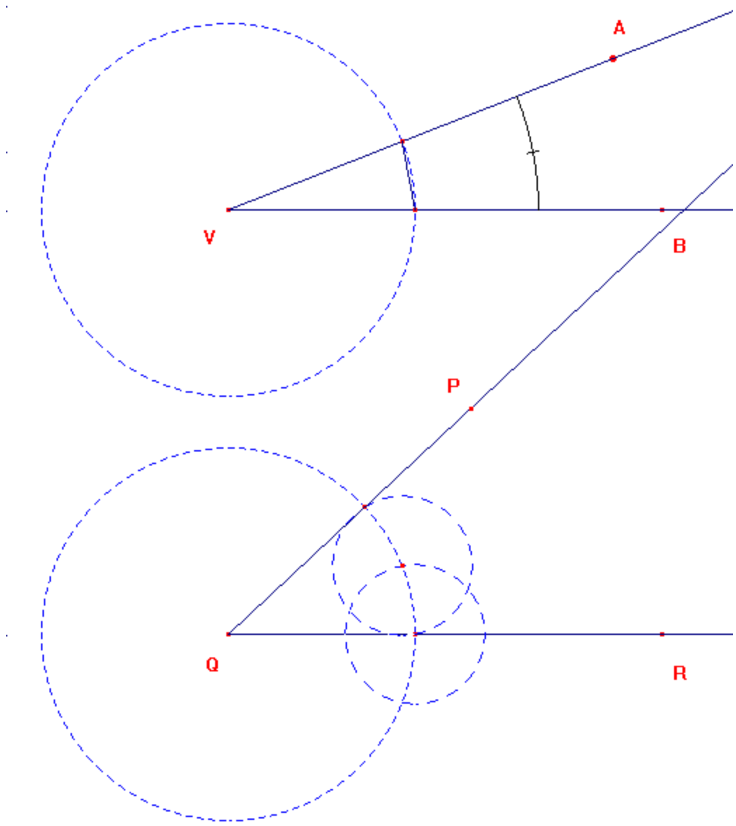
3. STRETNUTIE

Na začiatku stretnutia sme ešte venovali čas na opakovanie vedomostí z prechádzajúcej hodiny. Potom sme postupovali podľa pracovného materiálu so 4. príkladom:

Zostrojte uhol PQR, ktorý je dvojnásobok uhla AVB. |<PQR| = 2 |<AVB|

Geometrické zadanie príkladu obsahovalo uhol *AVB* a polpriamku *QR,* pričom jediný premiestniteľný element zadania bol bod *A* a s ním rameno *VA* uhla. Pred samotnou konštrukciou dvojnásobku uhla sme potrebovali tento uhol (*AVB*) preniesť na polpriamku *QR*. Bolo to realizovateľné pomocou ikony „kružnica s polomerom".

Postup prenášania uhla nebol už pre väčšinu žiakov až taký náročný, len u niekoľkých žiakov bolo treba vedomosti oživiť. Pri praktickej realizácií prenášania uhla sa vyskytol menší problém: ako zostrojiť kružnice s rovnakým polomerom? Na to slúžila už vyššie spomenutá konštrukčná možnosť: kružnica s polomerom.



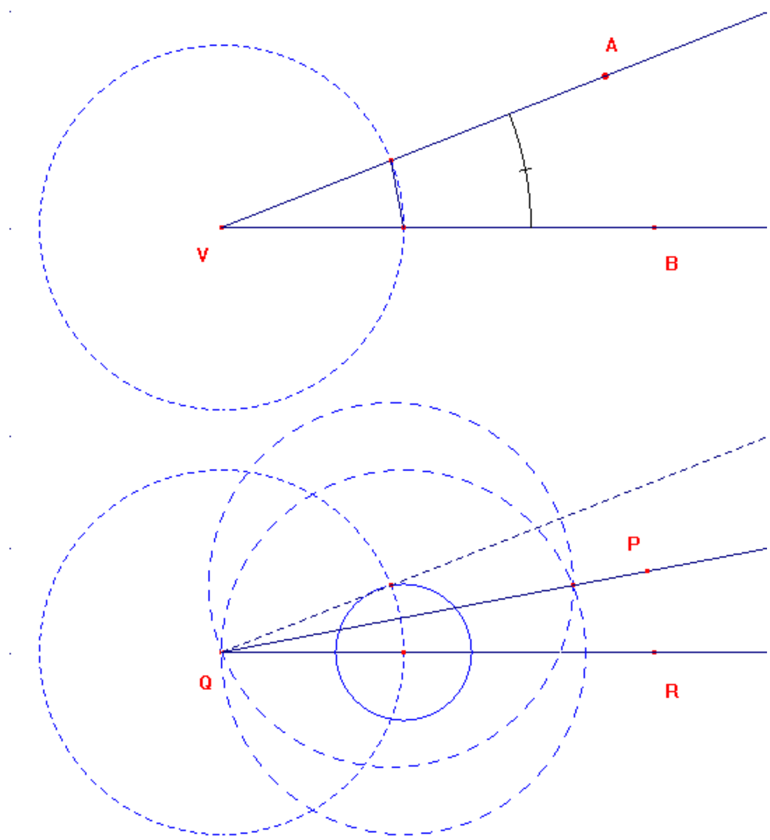
obr. VI. 7

Zdvojnásobiť uhol na základe uvedených poznatkov už nie je také ťažké: stačí len dvakrát po sebe aplikovať prenášanie uhla. Dokonca uvedeným algoritmom sme schopní zostrojiť nielen dvojnásobok, ale aj viacnásobok daného uhla.

Táto úloha žiakom nepôsobila väčšie ťažkosti ani na geometrickej, ani na používateľskej hladine.

Avšak jeden zo žiakov našiel zasa nekonštruované riešenie: zostrojenie kružníc zabezpečil pomocou kontroly vlastností, teda pomocou zistenia kolmosti dvoch lineárnych útvarov. Žiak využil, že polpriamky VB a QR sú v zadaní rovnobežné, ba čo viac, sú vlastne kolmo na ich smery posunuté. Zostrojil priamku, nastavil kolmo na spomenuté smery, nechal si to aj pomocou programu overiť. Táto kolmica pretne polpriamky VB a QR v takých bodoch, ktoré sú rovnako vzdialené od začiatočných bodov polpriamok. Teda vedel nakresliť kružnice s rovnakým polomerom. Na jednej strane ho musíme pochváliť za kreatívny spôsob riešenia, na druhej strane však musíme povedať, že jeho riešenie vyplývalo zo špeciálnych polôh daných údajov, teda postup by už nebol správny, ak by polpriamky VB a QR boli umiestnené inak – jeho riešenie potom nie je ani univerzálne a ani konštrukčne, lebo danú kolmicu nezostrojil.

<u>Poznámka</u>: Uvedená konštrukcia v programe je očividne interaktívnou pre uhly od 0° až po 180°. Akonáhle však orientovaný uhol AVB prekročí veľkosť 180°, s takýmto prenášaním prenesieme jej doplnkovú časť (do 180°). V geometrickom zadaní príkladu sme použili v programe zabudované označenie uhla. Bohužiaľ, to nie vždy korešponduje s vyššie napísanými, dokonca v programe neexistuje ani jednotný princíp konvexivity a vizualizácie uhla.



obr. VI. 8

Duálne k tomu bola nasledujúca úloha (5. príklad príručky):

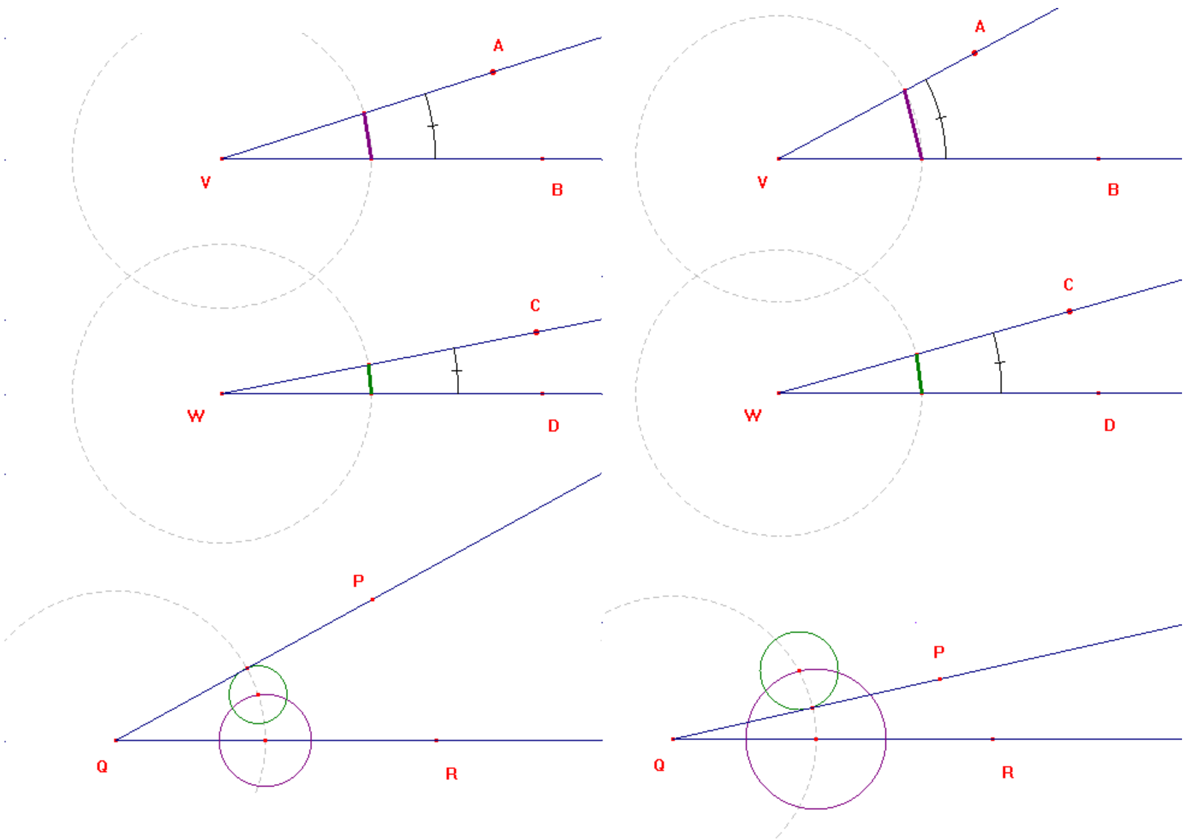
Zostrojte uhol PQR, ktorý je polovicou uhla AVB.   2 |<PQR| = |<AVB|

Geometrické zadanie tohto príkladu obsahovalo uhol *AVB* a polpriamku *QR*, pričom jediný premiestniteľný element zadania bol bod *A* a s ním rameno uhla (obr. VI. 8).

V prvom kroku sme potrebovali preniesť uhol, následne tento uhol rozpoliť. Prenášaním uhla sme sa už zaoberali počas prechádzajúceho príkladu, čiže to už nerobilo žiakom problém. K rozpoleniu uhla sme potrebovali zostrojiť os uhla, ale to už žiaci bez väčších ťažkostí vedeli urobiť, síce bez uvedomenia si toho, že použili vlastne geometrické miesto bodov. Dokonca ani na takto smerovanú otázku učiteľa nevedeli odpovedať.

V prechádzajúcej poznámke spomenuté, programom zapríčinené definičné ťažkosti sa, samozrejme, objavili aj tu.

V príkladoch č. 6 a 7 sme hľadali grafický súčet a rozdiel dvoch uhlov (*AVB* a *CWD*). V obidvoch prípadoch išlo o postupné prenášanie uhlov vzhľadom na orientáciu uhlov (obr. VI. 9 a 10).

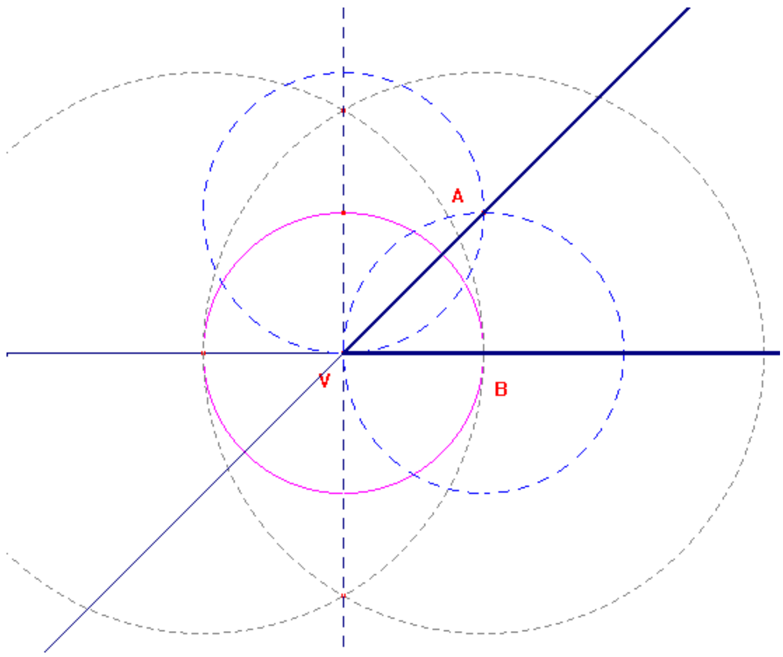


obr. VI. 9 a 10

V úlohách 8, 9 a 10 bolo treba zostrojiť také tzv. významné uhly (*AVB*), ktorých veľkosť bola 45°, 60° resp. 30°. Vo všetkých troch prípadoch bola daná len jedna polpriamka (*VB*) - rameno budúceho uhla.

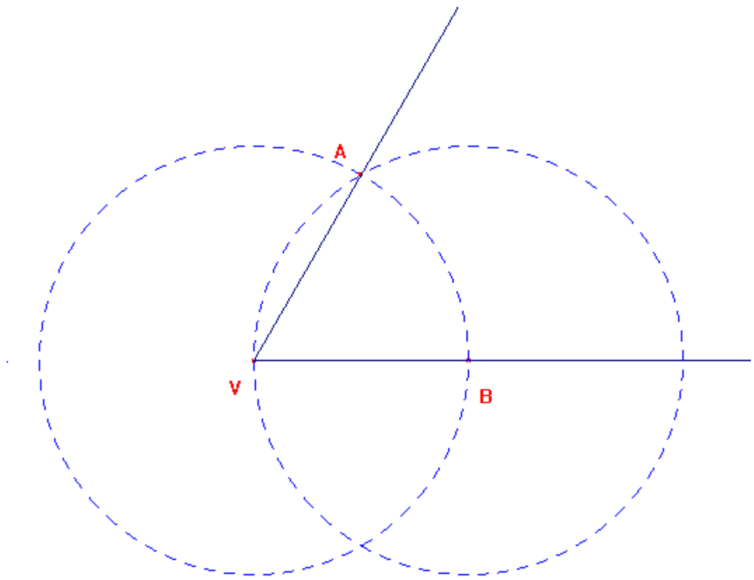
Pri konštrukcii uhla s veľkosťou 45° si stačilo uvedomiť, že je to polovica pravého uhla. Môžeme teda na základe 3. príkladu zostrojiť na priamku *VB* v bode *V* kolmicu a potom týmito priamkami určený uhol rozpoliť podľa 5. príkladu (obr. VI. 11).

Samozrejme, nie je to jediný spôsob riešenia. Niekoľko žiakov riešilo túto úlohu použitím vlastností pravouhlého rovnoramenného trojuholníka: zostrojili kolmicu na polpriamku *VB* v bode *B* a namerali pomocou kružnice so stredom v bode *B* vzdialenosť *VB*. Takto vznikol pravouhlý rovnoramenný trojuholník, v ktorom odvesny zvierajú s preponou 45° uhol.



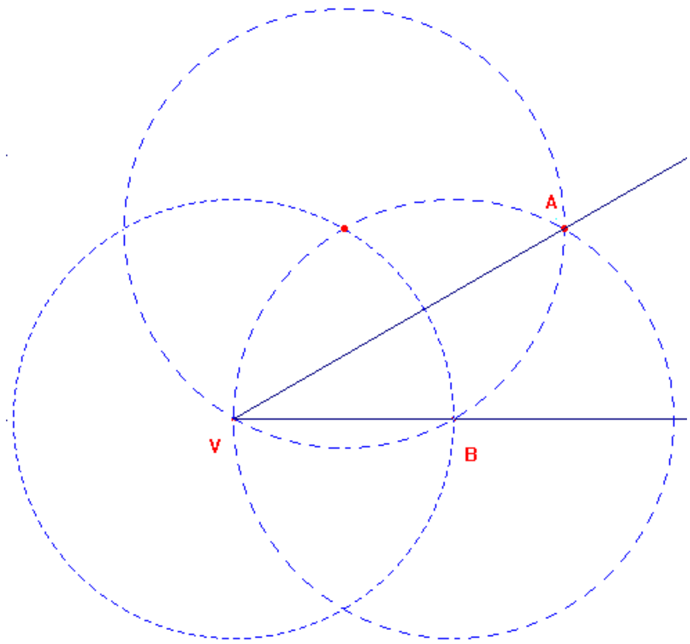
obr. VI. 11

Pri konštrukcií uhla s veľkosťou 60° stačilo použiť vlastnosti rovnostranného trojuholníka (vnútorné uhly majú veľkosť 60°).



obr. VI. 12

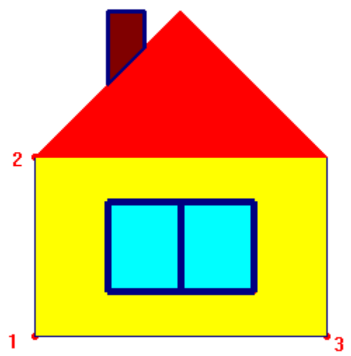
Pri konštrukcií uhla s veľkosťou 30° si stačilo tiež uvedomiť, že je to polovica uhla s veľkosťou 60°. Môžeme teda podľa princípu príkladov 3 a 5 zostrojiť hľadaný uhol.



obr. VI. 13

4. STRETNUTIE

Kvôli prázdninám väčšina žiakov neprišla, preto sme nepostupovali podľa pracovného materiálu. Namiesto toho sme vyskúšali jeden zaujímavý projekt: zostrojiť interaktívne „tancujúci" domček.

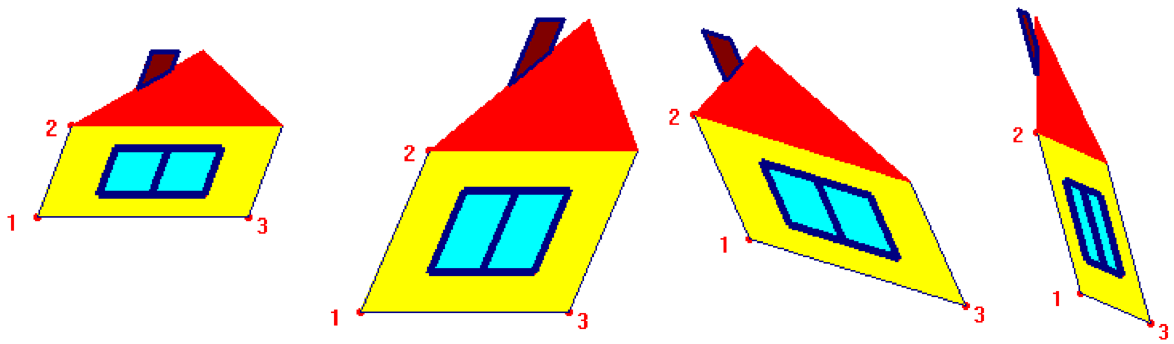


obr. VI. 14

Zadanie: Tri rohy domčeka (body 1, 2, 3) sú dané. Máme ich doplniť geometrickými objektmi tak, aby sme zmenou určujúcich bodov vedeli zmeniť tvar celého domčeka a aby vzhľad domu a jeho častí (steny, strecha, okno a komín) zostal „prirodzeným" aj po zmenách.

Žiakom sme ukázali v programe hotovú konštrukciu, ako to malo vyzerať (obr. VI. 14).

Uvedieme niekoľko rôznych situácií:



a) b) c) d)

obr. VI. 15 a, b, c, d

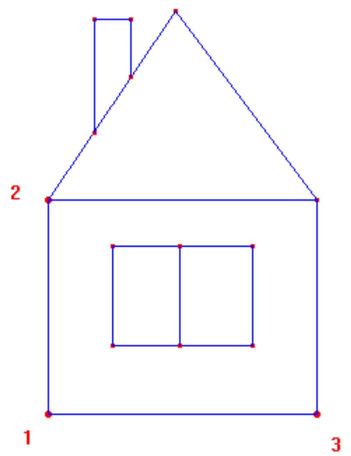
Autorom tejto úlohy je J. Vaníček (Česká republika).

Ide o úlohu, ktorá je riešiteľná pomocou perspektívnej (osovej) afinity; ako je to vidno aj z horeuvedených obrázkov, zachováva sa rovnobežnosť a deliaci pomer.

Napriek tomu úloha je riešiteľná aj bez použitia perspektívnej afinity, aj pre žiakov našej skupinky, avšak vedenie učiteľa v tomto prípade bolo nevyhnutné, hoci sme dávali len vtedy a len toľko potrebných nápadov, ako sme uznali za nutné. Ukázali sme skôr len chyby konštrukcie pomocou interaktívnej zmeny, alebo sme skúsili dávať vhodné pomocné otázky… Obávame sa, že bez tejto pomoci by žiaci neboli schopní samostatne vyriešiť úlohu v rámci jedného stretnutia.

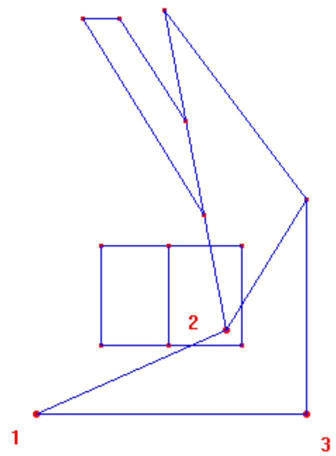
Predpokladáme, ako sa o tom zmieňuje aj Vaníček [47], žiaci – aspoň ich nadanejšia časť – by bola schopná úlohu pomocou programu Cabri vyriešiť, ale nezabudnime na to, že žiaci tohto výskumného projektu mali za sebou iba tri stretnutia a mali pri práci používať pôvodné nastavenie (prostredie) programu Cabri, od ktorého si už odvykli! (Pri konštrukcii kolmice nepoužili priamu možnosť, ale chceli ju zostrojiť pomocou kružníc, ako sme to robili v špeciálnom prostredí.)

Žiaci pracovali samostatne, pričom na samostatnom počítači bola hotová interaktívna konštrukcia, aby si mohli priamo v praxi konštrukciu vyskúšať. Dosť dlho sa zaoberali s tým, že chceli obrázok skopírovať. Potom sa do istej miery nechápavo dívali na to, že sa ich konštrukcia nespráva tak, ako vzorová. Stačilo, ak pohli niektorým určujúcim bodom. Ukážka:



obr. VI. 16 a

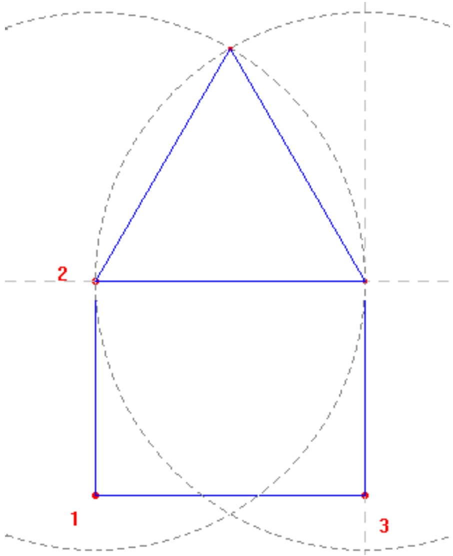
Takto to vyzeralo, ale po zmene polohy napr. bodu 2 dostali niečo takéto:



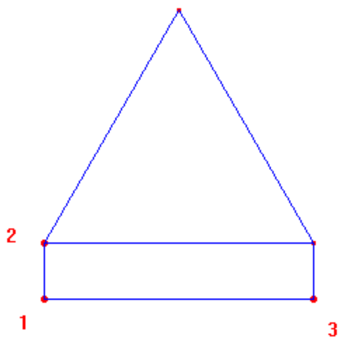
obr. VI. 16 b

Po dôkladnom preštudovaní problému žiaci zistili, že stena domu (bez strechy; štvoruholník), má svoje protiľahlé strany vždy rovnobežné. Teda je to rovnobežník. To pomocou rovnobežiek vedeli bez ťažkostí zostrojiť.

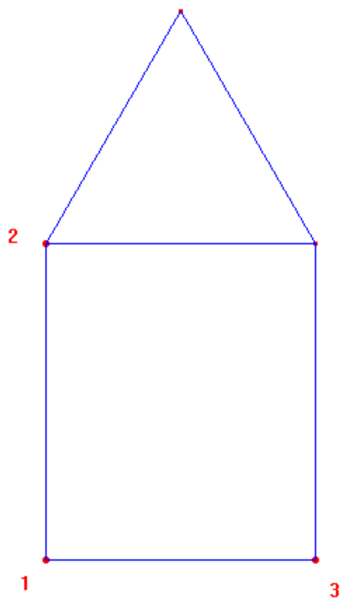
Ďalšiu väčšiu ťažkosť tvorila strecha – trojuholník. Na začiatku si mysleli, že to bude rovnostranný trojuholník nad „hornou“ podstavou – „vodorovnou“ stranou štvoruholníka (obr. VI. 17). Avšak s touto myšlienkou boli viazané nasledujúce chyby: nízka aj vysoká budova má rovnako vysokú strechu a navyše, ak štvoruholníkové susedné strany nie sú na seba kolmé, strecha pôsobí neprirodzene (pomocné čiary sme už skryli) – pozri obrázky VI. 8 a, b, c.



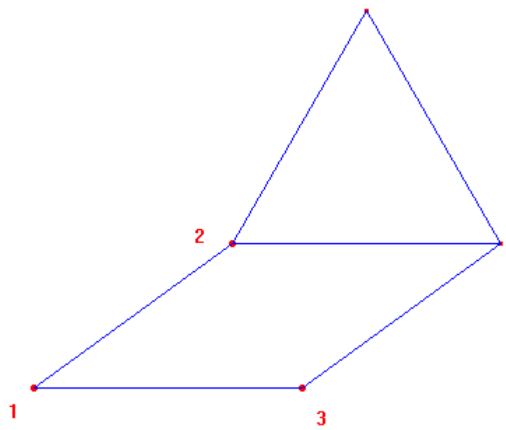
obr. VI. 17



obr. VI. 18 a

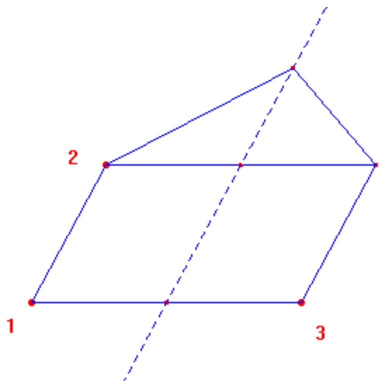


obr. VI. 18 b



obr. VI. 18 c

Podľa vzora vedeli usúdiť, že príslušné stredy hornej a dolnej podstavy domčeka a vrchol strechy ležia na jednej priamke. Išlo však o veľmi ťažký a zdĺhavý žiacky objav. Na základe toho vrchol strechy zvolili na priamke, ktorá prechádzala stredom hornej a dolnej podstavy domčeka.



obr. VI. 19

V tomto nastali problémy v ovládaní programu. Mohli to realizovať rôznymi spôsobmi:

1) zostrojiť priamku, ktorá spája stredy strán (na obrázku),
2) zostrojiť rovnobežku so „zvislými" stranami domčeka prechádzajúcu stredom podstavy.

V prvom prípade bolo postačujúce zvoliť si bod na tejto priamke ako vrchol strechy a obrázok bol interaktívnym (program zachováva deliaci pomer).

V druhom prípade, ak sme na priamke zvolili bod, program pri zmenách polohy zachovával jeho vzdialenosť od určujúceho bodu, čo nebola šťastná voľba (o tejto podrobnejšie pozri 1. stretnutie). V tomto prípade teda bolo potrebné prenášať pomocou kružnice na túto priamku nejakú, s výškou súvisiacu veličinu, napr. dĺžku bodov *1* a *2*.

Nakreslenie okien a komína nieslo zo sebou analogické problémy. Nebudeme sa s nimi teraz hlbšie zaoberať.

Keď už bol domček zostrojený, ukázali sme žiakom, ako môžu jeho časti „vymaľovať" (možnosť Výplň s farbou).

<u>Komentáre</u>

Úloha na úrovni ovládania programu pre prítomných žiakov nebola jednoduchá. Avšak očividne ich veľmi silne motivovala snaha zostrojiť takýto domček. Boli pod vplyvom interaktívne sa meniaceho obrázku okúzlení myšlienkou, že aj oni vytvoria niečo podobné, a po zostrojení domčeku boli značne vyčerpaní, ale mali obrovskú radosť. Dokonca na nasledujúcej hodine hrdo ukazovali svoje dielo spolužiakom.

Úloha mala prínos aj z metodického hľadiska: postrehli sme, že žiaci, ktorí sa zúčastnili v tomto výskumnom mikro-projekte, boli na nasledujúcich stretnutiach oveľa šikovnejší v porovnávaní s ostatnými žiakmi. To sa týkalo nielen ovládania programu Cabri, ale do istej miery aj porozumeniu geometrickým súvislostiam.

5. STRETNUTIE

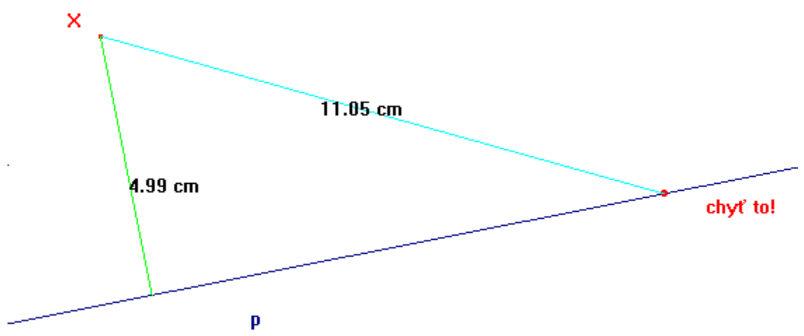
Pokračovali sme v práci podľa príručky. Zopakovali sme grafický súčet a rozdiel uhlov, ako aj konštrukcie významných uhlov (45°, 60°, 30°), čím sme ukončili prvú kapitolu príručky.

V rámci ďalšej kapitoly sme sa zaoberali meraním vzdialenosti geometrických objektov, geometrickými miestami bodov a s nimi súvisiacimi konštrukciami. Kapitola obsahovala okrem úloh na vyriešenie aj ukážkové príklady, ktorých cieľom bolo prezentovať vlastnosti geometrických miest bodov a vysvetliť ich súvislosti.

Prvý príklad slúžil na zavedenie pojmu vzdialenosti bodu od priamky, nakoľko v ďalšom sme ho potrebovali viackrát. Vzdialenosť dvoch bodov pozná a používa každý (alebo skoro každý) žiak intuitívne a úplne prirodzene – je to najkratšia cesta po priamke. Ako by sme mohli zadefinovať vzdialenosť medzi rôznorodými elementmi – medzi bodom a priamkou:

Ako určíme vzdialenosť bodu X od priamky p ?

Geometricky: bola daná pevne zvolená priamka *p* a mimo nej pevný bod *X*. Na priamke bol zvolený ľubovoľný bod, pričom bola odmeraná vzdialenosť tohto bodu od bodu *X* a vzdialenosť bodu *X* od priamky.

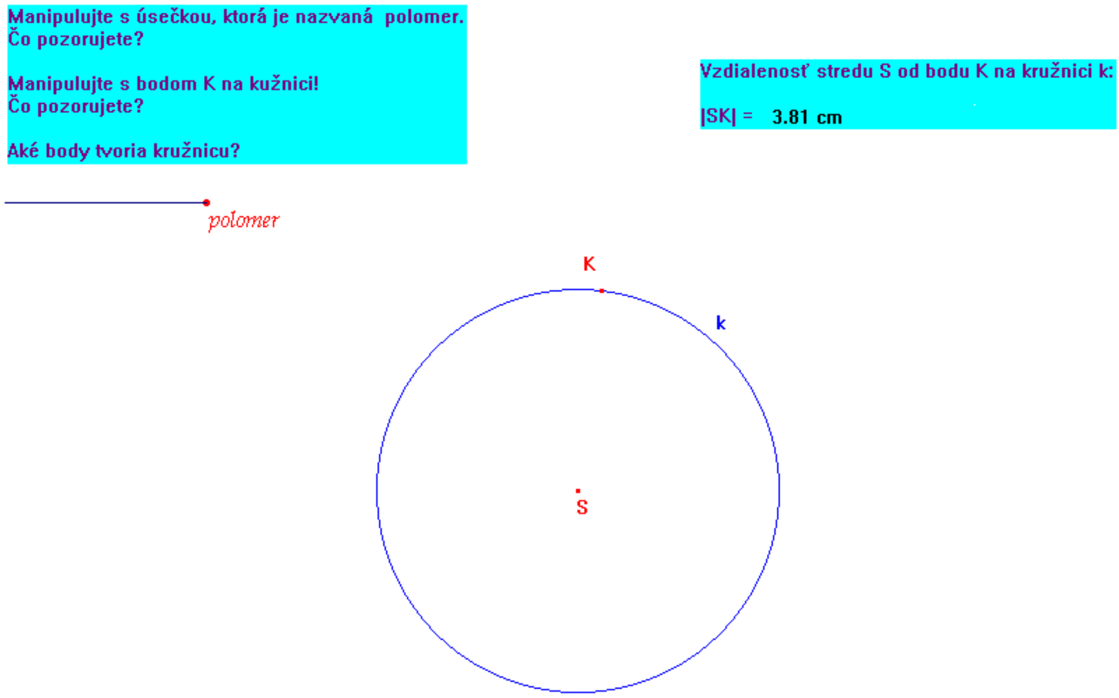


obr. VI. 20

Žiaci pomocou pripravenej konštrukcie zistili, že vzdialenosť medzi ľubovoľným bodom priamky a pevne zvoleným bodom *X* môže nadobudnúť hocijakú hodnotu, ktorá je väčšia, alebo sa rovná dĺžke vyznačenej úsečky (na obrázku so zeleným).

Táto úsečka je očividne kolmá na priamku, ale žiaci to overili aj pomocou programu. Z nekonečne veľkého množstva hodnôt jednotlivých vzdialeností si vybrali jednu hodnotu – minimum. Príklad slúžil na to, aby žiaci pochopili, čo je vzdialenosť bodu od priamky.

2. príklad sa zaoberal s kružnicou ako geometrickým miestom bodov (množina bodov). Cieľom úlohy bolo dostať sa k metrickej definícií kružnice:



obr. VI. 21

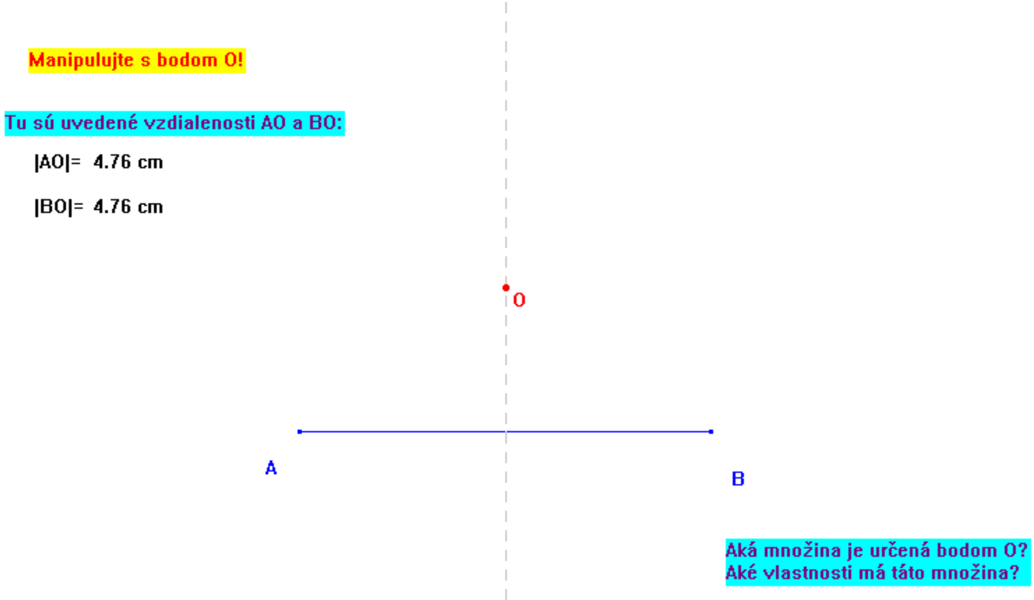
Daná bola kružnica s pevne zvoleným stredom a meniteľným polomerom. Žiaci mali pozorovať, či sa mení alebo nemení vzdialenosť ľubovoľného bodu *K* kružnice od stredu *S* pri ľubovoľnej, ale pevne zvolenej nemennej veľkosti polomeru. Táto vzdialenosť bola odmeraná a jeho hodnota zobrazená vpravo hore.

Žiaci zistili, že ak nastavia polomer na nejakú konkrétnu hodnotu a potom začnú pohybovať bodom *K* po kružnici, tak vzdialenosť od stredu *S* a nemení. Na základe toho boli vyzvaní, aby vyslovili definíciu kružnice.

<u>Poznámka</u>

V týchto ukážkových príkladoch isté elementy boli zafixované, napr. v predchádzajúcom - stred kružnice. Tieto obmedzenia boli v daných súboroch uskutočnené vedome. Dôvodom bolo, že sme chceli upriamiť pozornosť žiakov na skúmanú vlastnosť, aby ich pozornosť nebola rozptýlená zbytočnou interaktivitou iných prvkov. Preto v prvom príklade bol premiestniteľný len bod na priamke.

3. príklad prezentoval vlastnosti bodov osi úsečky. Manipulovali sme bodom *O* (posúvali sme ho po osi úsečky *AB*). Boli zmerané interaktívne sa meniace vzdialenosti bodu *O* od koncových bodov úsečky (*A*, *B*).



obr. VI. 22

Manipulovaním bodom *O* žiaci zistili, že uvedené vzdialenosti pri každej polohe bodu *O* boli rovnaké. Bodom *O* očividne vedeli pohybovať po takej priamke, ktorá mala aj nasledujúce vlastnosti (a vedeli to overiť pomocou programu):

- Je kolmá na úsečku *AB*
- Prechádza stredom úsečky *AB*.

V nasledujúcom 4. príklade sa požadovalo zostrojiť os úsečky. Bolo treba skonštruovať kružnice so stredmi *A* a *B*, ktorých polomery boli rovnaké. Univerzálnosť konštrukcie mohli zabezpečiť napr. tým, že za polomer zvolili úsečku *AB*.

Úloha vzhľadom na analógiu konštrukcie kolmice bola pre žiakov nenáročná.

5. príklad mal tiež ukážkový charakter:

Bod P má od priamky AB konštantnú vzdialenosť.

Kde ležia všetky také body?

Cieľom úlohy bolo ukázať žiakom geometrické miesto bodov - rovnobežku s danou priamkou (všetky tie body, ktoré majú od danej priamky tú istú vzdialenosť – ekvidistanta, …).

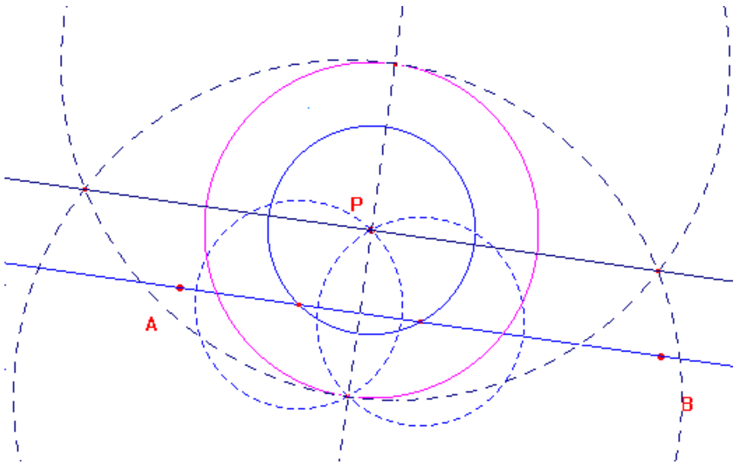
obr. VI. 23

Žiaci boli upozornení aj na to, že takto dostaneme priamku v oboch polrovinách určených priamkou *AB*.

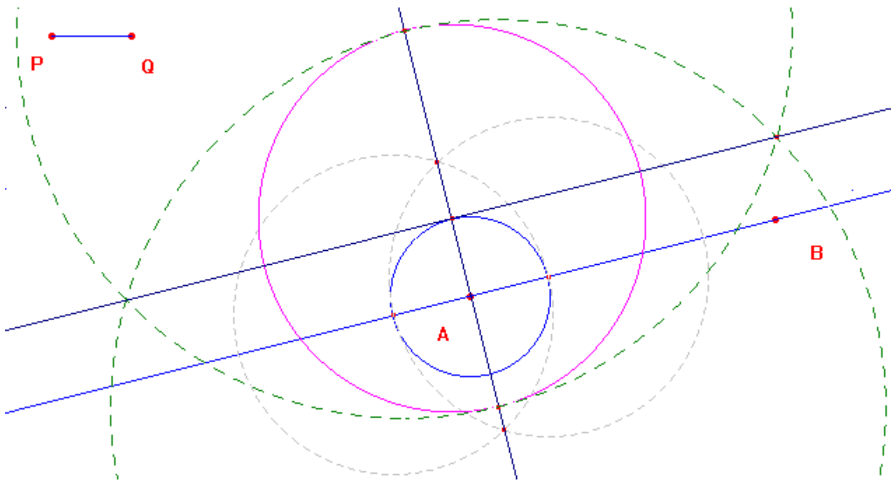
S rovnobežkami sme sa zaoberali ešte v dvoch príkladoch, ale už oveľa pragmatickejšie. V obidvoch prípadoch bolo treba zostrojiť rovnobežku s danou priamkou (*AB*): v príklade 6 cez daný bod (*P*), v príklade č. 7 v danej vzdialenosti (úsečka *PQ*).

V rámci tejto kapitoly tieto úlohy boli prvé, nad ktorým bolo treba aj trochu dlhšie porozmýšľať. Podľa predchádzajúcej ukážky platí, že rovnobežka je taká **priamka**, ktorá má všetky svoje body v tej istej vzdialenosti od danej priamky. Na základe toho by mohli riešiť úlohy: stačí zostrojiť dva body rovnobežky – dva body, ktoré od danej priamky majú rovnakú vzdialenosť. K tomu by potrebovali aj kolmicu. Avšak úloha je riešiteľná aj iným spôsobom, ktorý pozná skoro každý žiak takéhoto veku: zostrojíme kolmicu na danú priamku a následne ďalšiu kolmicu na kolmicu. Takto skonštruovaná priamka je rovnobežná s pôvodnou.

Teda ako je vidno, na riešenie daných príkladov mali žiaci možnosť vybrať z niekoľkých rôznych alternatív. Žiaci dali prednosť známej konštrukcii kolmicu na kolmicu, pravdepodobne preto, lebo zostrojením kolmíc sme sa zaoberali na začiatku dosť podrobne.



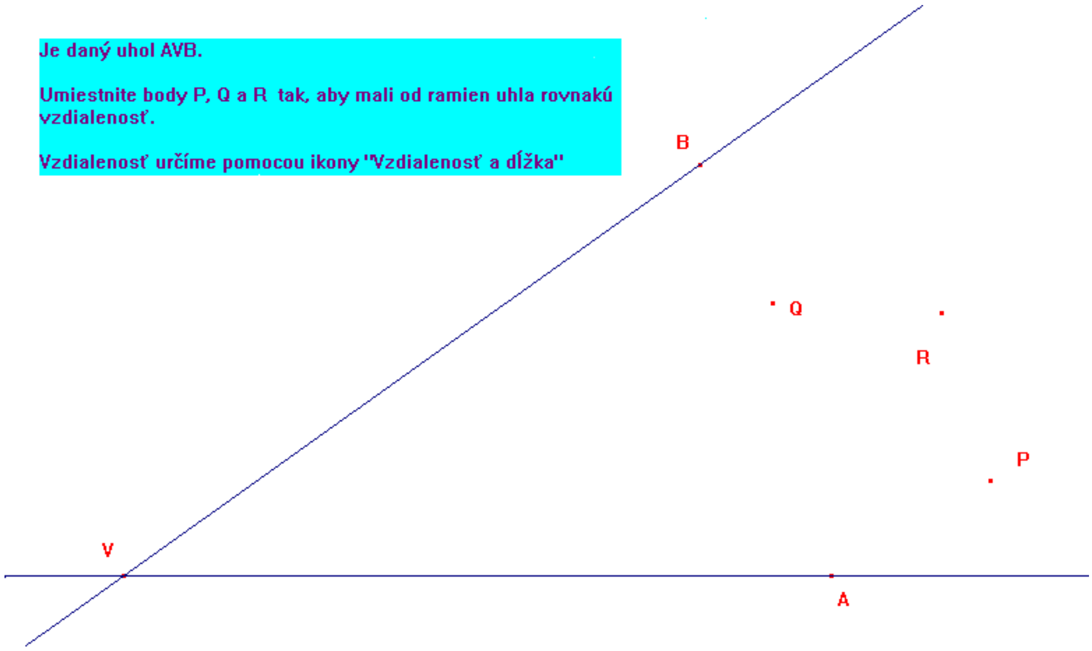
obr. VI. 24



obr. VI. 25

Nasledujúce tri príklady ukážkového charakteru boli zase venované tej istej téme: Aké geometrické miesto je os uhla?

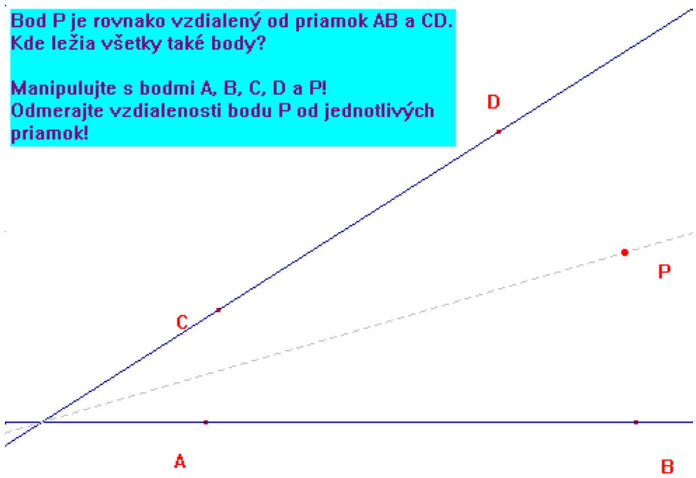
V príklade 8 bolo treba umiestniť tri body tak, aby pre jednotlivé body (*P*, *Q*, *R*) ich vzdialenosť od jednej priamky (*VA*) bola taká istá ako vzdialenosť od druhej priamky (*VB*). Odporúčali sme k tomu používať možnosť merania – program okrem vzdialenosti dvoch bodov je schopný odmerať aj vzdialenosť bodu od priamky. Ak vzdialenosti daného bodu od dvoch priamok sú rovnaké, bod je správne nastavený.



obr. VI. 6

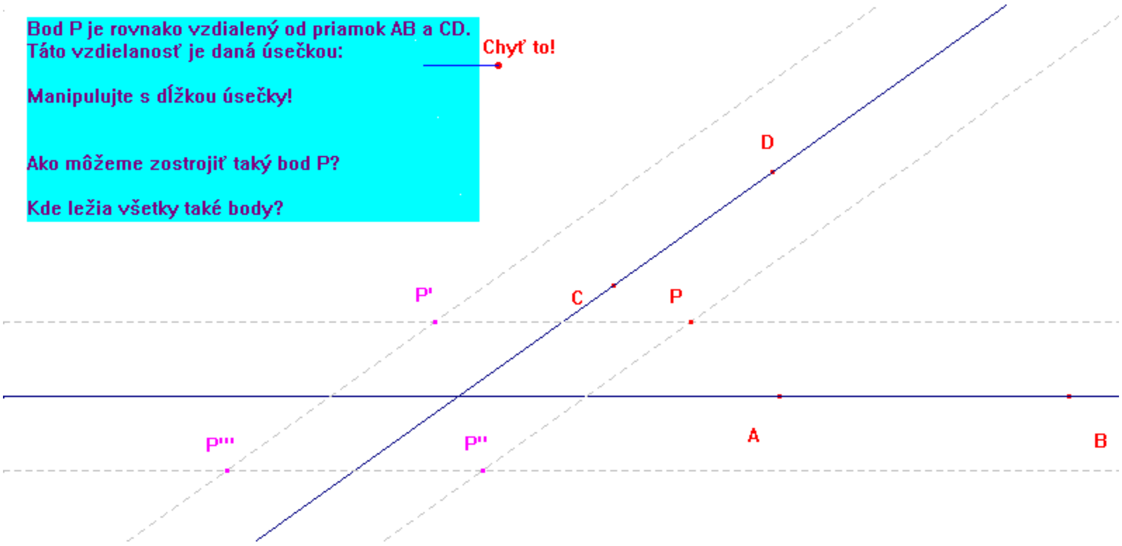
Bod P bol ľubovoľný bod (stupeň voľnosti 2). Body Q a R mali stupeň voľnosti 1, čiže žiaci s nimi mohli pohybovať po lineárnych útvaroch (úsečka, priamka). Naviac pri každej polohe bodu R platila požadovaná vlastnosť.

To sme ukázali vlastne aj v príklade 9. V tomto prípade bolo vyznačené už aj hľadané geometrické miesto a všetky prvky ukážky už boli interaktívne meniteľné.



obr. VI. 27

V príklade 10 bola rovnaká vzdialenosť bodu od priamok znázornená pomocou rovnobežiek. Túto vzdialenosť žiaci vedeli zmeniť pomocou zmeny dĺžky vyznačenej úsečky. V tejto súvislosti sme ukázali možnosť programu, pomocou ktorej sme schopní vykresliť stopu bodu.



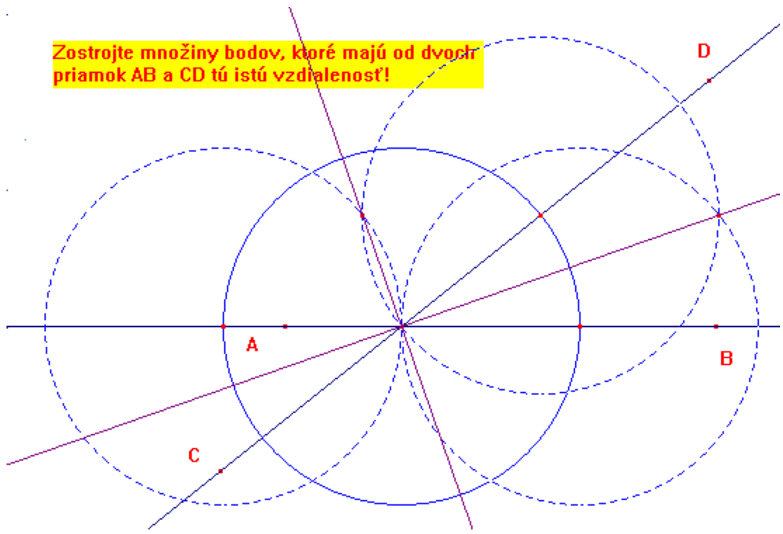
obr. VI. 28

Ako to vidno aj na obrázku, našli sme štyri také body, ktoré vyhovujú našim požiadavkám. Po vykreslení stopy žiaci uvideli, že za hľadané geometrické miesto získali priamky, ktoré vyzerajú, ako keby boli na seba kolmé. Učiteľ v tejto situácii kvôli presnosti pojmov musel povedať, že táto priamka je os vedľajšieho uhla.

6. STRETNUTIE

Teoretické poznatky z tejto oblasti žiaci zavŕšili s 11 príkladom:

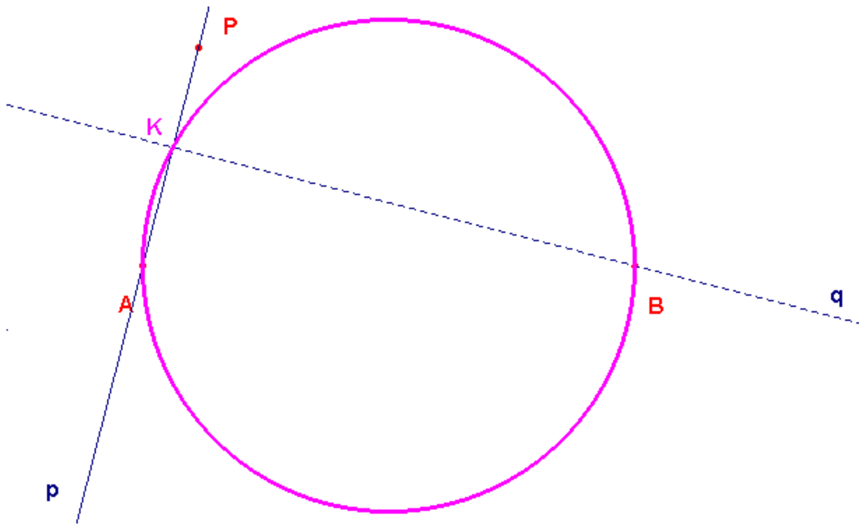
Zostrojte množiny bodov, ktoré majú od dvoch priamok AB a CD tú istú vzdialenosť!



obr. VI. 29

Dá sa povedať, že žiakom táto úloha nerobila žiadne ťažkosti.

Posledné geometrické miesto, s ktorým sa žiaci základnej školy ešte stretnú, je Tálesová kružnica. Posledná ukážka kapitoly prezentuje, ako môžeme ukázať žiakom pomocou programu zavedenie a zmysel Tálesovej kružnice. Zadanie:
Bodmi A, B prechádzajú dve na seba kolmé priamky p, q. Bod K je ich priesečník. Zapnite stopu bodu K! Chyťte a zmeňte polohu bodu P!



obr. VI. 30

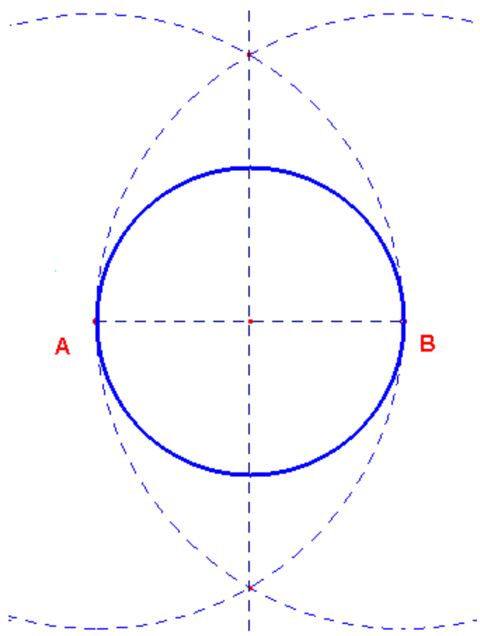
Aký útvar opíše priesečník K priamok p, q pri tomto premiestnení?
Ako takýto útvar nazývame?

Realizácia príkazov úlohy nerobila žiakom žiadne problémy, dokonca podľa vykreslenej stopy správne uhádli aj to, aký útvar bude hľadané geometrické miesto. Ale odpovedať na terminologickú otázku, ako sa nazýva útvar s takýmito vlastnosťami, už nevedeli. Vôbec si nespomenuli na Tálesovú vetu.

Mysleli sme si, že takéto vizuálne zavedenie Tálesovej kružnice („dve na seba kolmé priamky ...") bude pre žiakov natoľko názorné, že riešenie nasledujúceho príkladu (č. 13), ktoré sa týka zostrojenia tohto útvaru, nebude už problémové:

Zostrojte geometrické miesto všetkých takých bodov, z ktorých vidíme úsečku AB pod pravým uhlom.

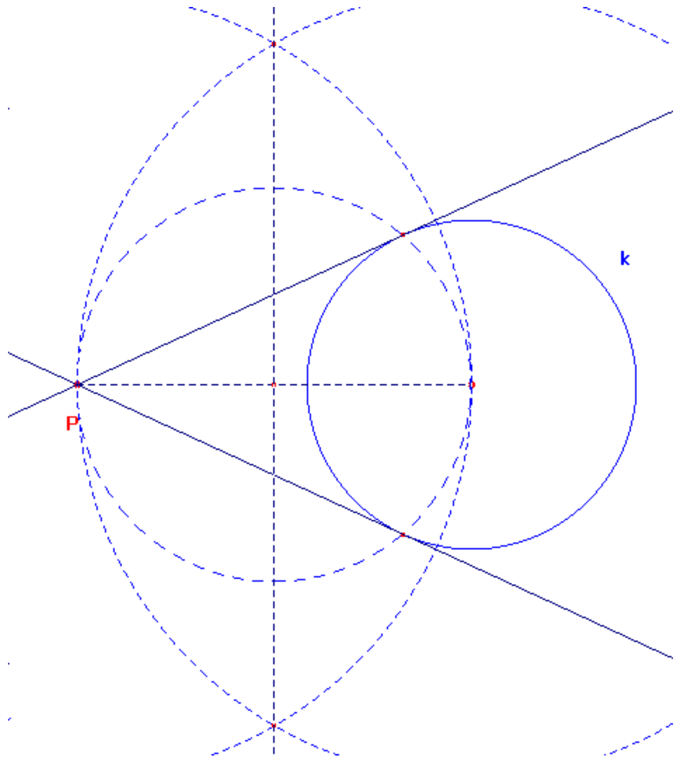
Oproti našim očakávaniam úloha nebola triviálna, avšak po krátkej diskusii ju žiaci vyriešili bez väčšej námahy. Bolo potrebné dostať sa k tomu, čo je a ako je umiestnená hľadaná množina bodov… Ak chceme zostrojiť túto kružnicu, je potrebné nájsť stred a jeden bod kružnice… Konečne sme sa dostali k tomu, že stred Tálesovej kružnice je stredom tej úsečky, nad ktorou ju chceme zostrojiť. Stred zostrojili pomocou osi úsečky (príklady 3 a 4).



obr. VI. 31

Aj posledná (14.) úloha kapitoly súvisela s Tálesovou kružnicou, bola však už zameraná na aplikáciu teoretických poznatkov:

Zostrojte dotyčnicu ku kružnici k z daného bodu P.



obr. VI. 32

K riešeniu úlohy bolo potrebné ukázať žiakom, čo je dotyčnica ku kružnici, zdôrazniť, aké geometrické súvislosti sú platné pri konštrukcii.

Niekoľko žiakov sa totiž pokúsilo úlohu „riešiť“ pomocou priloženia priamky ku kružnici. V najnešťastnejšom prípade tú priamku, ktorá prechádzala bodom *P* zvolili úplne ľubovoľne (počet spoločných bodov: 0, 1, alebo 2), trochu rozumnejšie bolo zvoliť druhý určujúci bod priamky na kružnici (počet spoločných bodov: 1, alebo 2) , ale ešte aj to bolo ďaleko od opodstatneného postupu konštrukcie.

Naším cieľom bolo priviesť žiakov k použitiu Tálesovej kružnice bez toho, aby sme ich tomu prinútili. Nechceli sme, aby len prebrali známy postup, ale aby aj oni sami prišli k správnej konštrukcii.

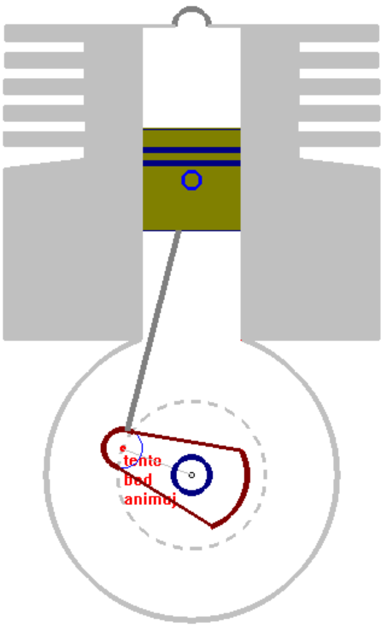
Žiaci však neboli schopní úlohu zostrojiť. Po spoločnom prediskutovaní príkladu sme navrhli postup, ktorý žiaci bez väčšej námahy vedeli realizovať. V konštrukcii, samozrejme, využili vlastnosti Tálesovej kružnice a ako sa potom ukázalo, konštrukcia bola aj univerzálna. Oproti našim očakávaniam, sami síce žiaci úlohu nezvládli, ale po spoločnom dialógu riadeným učiteľom, sa dostali k správnemu riešeniu.

Týmto príkladom sme ukončili preverovanie pracovného materiálu.

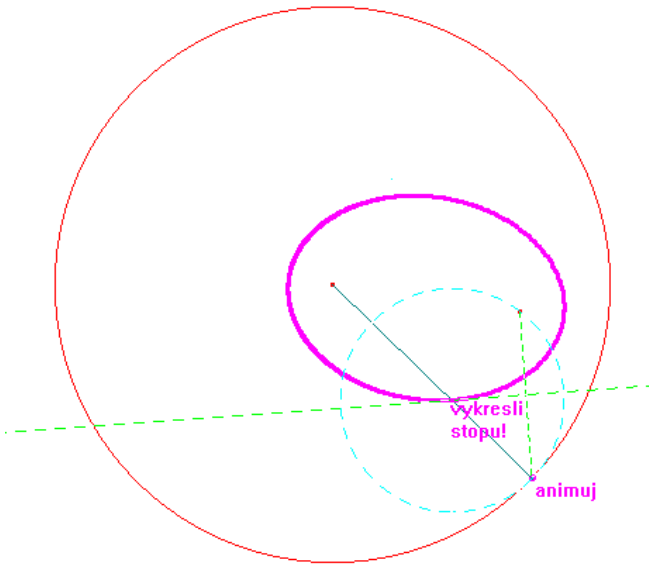
Vo zvyšnom čase sme ukázali žiakom ďalšie možnosti programu a zaujímavosti, čo sme považovali za dobré motivačné ukončenie počítačového kurzu programu Cabri. Išlo predovšetkým o animácie a viazané animácie. Tvorba takýchto animácií predpokladá dostatočné zručnosti ovládania programu, dôkladné geometrické vedomosti a schopnosť logicky rozmýšľať.

Príklady boli len ukážkového a motivačného charakteru. Žiaci dostali ku každej animácii návod, ako sa má konštrukcia ovládať – čo treba animovať.

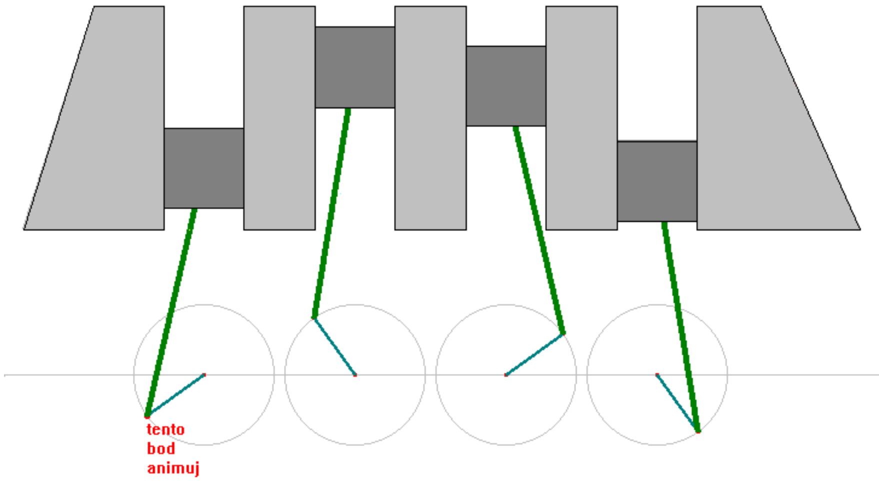
V nasledujúcom uvedieme niekoľko animácií, pripravených pre žiakov, s ktorými sa radi pohrali. Na priloženom kompaktnom disku (CD) sú nasledujúce statické obrázky prevedené na tvar apletu – dajú sa pozerať priamo v pohybe a poskytli sme aj návod k ovládaniu.



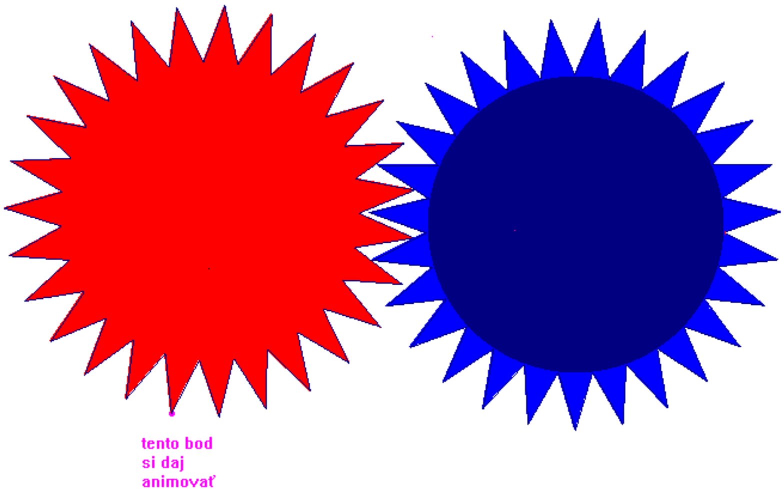
obr. VI. 33 : Animácia 1 - Motor



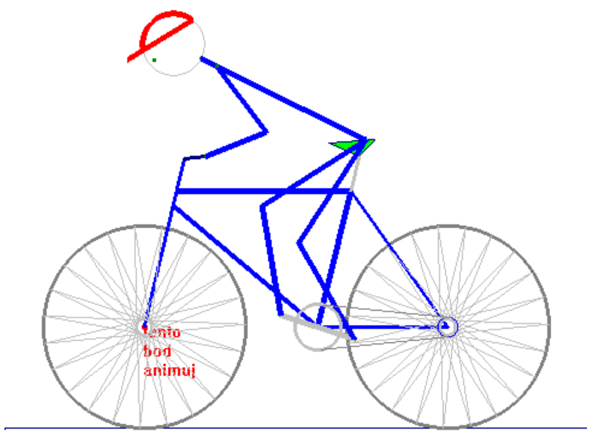
obr. VI. 34 : Animácia 2 - Elipsa



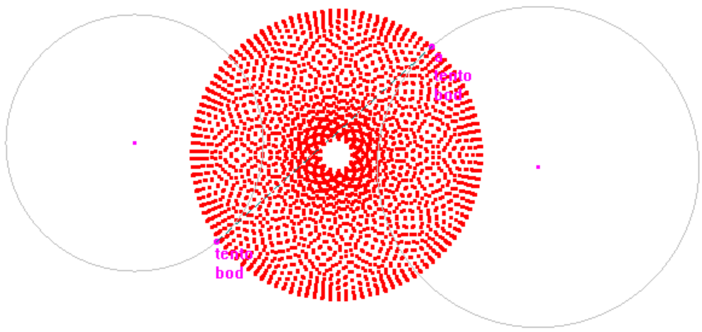
obr. VI. 35 : Animácia 3 - Motor



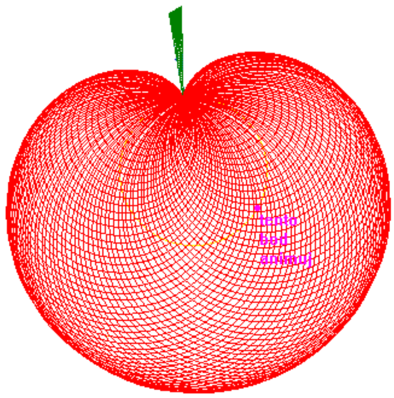
obr. VI. 36 : Animácia 4 – Ozubené kolesá



obr. VI. 37 : Animácia 5 – Cyklista



obr. VI. 38 : Animácia 6 – Paralelná animácia

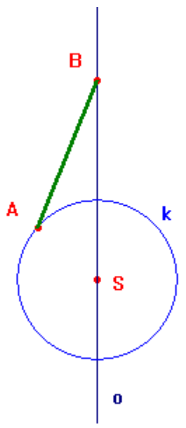


obr. VI. 39 : Animácia 7 – „Jablko"

Všetky obrázky, ktoré tu vidíte, boli geometricky konštruované pomocou programu.

V animáciách 1, 3, 4 a 5 sme zostrojili také modely reálnych strojov, ktoré pri zmene, resp. pri animácii vyznačeného bodu (po nejakom útvare) napodobňujú ich skutočnú činnosť v prevádzke: prevod lineárneho pohybu na rotačný pri motore (1 a 3), alebo otáčanie kolesa bicykla na priamej dráhe (5). Žiakov uvedené konštrukcie okúzlili, mali z interaktivity konštrukcií radosť. Ovládanie hotových konštrukcií im nespôsobilo ťažkosti, ale pri snahe o reprodukciu konštrukčného postupu si museli uvedomiť, že jednak im chýbajú isté vedomosti z geometrie a žiaľ nemajú v tejto oblasti ani požadované skúsenosti.

Uvedieme konkrétny príklad: „motor" – prevod rotačného pohybu na lineárny (obr. VI. 33). Geometrická podstata spočíva v nasledujúcom:



obr. VI. 40

Bod A pohybuje sa po kružnici $k(S,r)$.

Hľadáme k tomu prislúchajúci bod B na priamke o ($S \in o$), ak vieme, že úsečka AB má konštantnú dĺžku.

Môžeme to zaručiť tým, že zoberieme jednu pomocnú úsečku $h = |AB|$ a zostrojíme kružnicu s týmto polomerom so stredom v bode A (podmienka modelu: $h \geq 2r$). Táto kružnica pretne priamku o v dvoch bodoch, z ktorých vyberieme jednu za bod B.

Žiaci pokúsili z vlastnej iniciatívy na základe hotovej konštrukcie rekonštruovať postup a zostrojiť dynamickú konštrukciu. Ich snaha však bola neúspešná: zabudli, resp. nepoužívali vyššie opísané zásady konštrukcie, napr. že dĺžka AB je konštantná, alebo že bod B musí ležať na priamke.

V ostatných prípadoch (2, 6 a 7) sme použili aj vyznačenie stopy (bodu, ale aj útvaru). Najbližší vzťah k geometrii mala animácia č. 2, kde sme vykreslili stopu stredov kružníc, ktoré sa dotýkajú danej kružnice a prechádzajú daným bodom. Množina všetkých stredov tvorí kužeľosečku. Aj žiaci veľmi správne postrehli, ak daný bod je vnútorným bodom kruhu, je to elipsa; ak je vonkajším bodom, hyperbola.

V animácií č. 6 sme použili Paralelnú animáciu – animovali sme súčasne dva body po dvoch kružniciach, pričom sme vykreslili stopu bodu, ktorý bol stredom úsečky určenej s animovanými bodmi. Tvar výsledného obrazu závisel od rýchlosti pohybu animovaných bodov, žiaci dostávali rôzne množiny bodov cyklicky sa otáčajúcich kriviek – „kvety“, ale niektorým sa podarilo nastaviť rýchlosti aj tak, že dostávali uzavretú krivku – elipsu. Niektorí žiaci na základe uvedeného príkladu veľmi kreatívne zostavili takú konštrukciu, kde animovali naraz viac (3, 4, …) bodov.

V animácií 7 sme ukázali, že s animáciou sme schopní „rovnomerne“ vykresliť aj stopu celého útvaru: „jablko“. V našom prípade sme vykresľovali stopu kružnice, ktorej stred pobiehal sa po danej kružnici, ktorá prechádzala aj daným bodom tejto kružnice.

Žiaci už boli schopní tvorby animácií takéhoto typu, nakoľko k tomu neboli potrebné hlbšie poznatky „interaktívnej“ geometrie.

VI. 1. VYHODNOTENIE VÝSKUMNÉHO PROJEKTU 1

Pri výbere oblastí učiva pre realizáciu výskumu pomocou použitia počítača sme uprednostňovali konštrukčnú časť geometrie a v rámci toho základné konštrukcie, lebo pri tých oblastiach žiaci boli naozaj schopní sebarealizácie a vlastnej tvorivej práce.

Táto idea sa osvedčila. Ukázalo sa, že žiaci sa síce vrelo zaujímali o zložitejšie konštrukcie, ale samostatne vytvoriť takéto konštrukcie sa im nedarilo. V takýchto prípadoch im nechýbali teoretické poznatky a ovládateľské skúsenosti programu -- ale jednoducho neboli schopní spojiť a aplikovať potrebné vedomosti.

Tieto udalosti opodstatňujú vlastne náš výber učiva – že sme výskum venovali elementárnym konštrukciám.

Poznatky získané z pozorovania žiakov zhrnujeme v nasledujúcich okruhoch z rôznych pohľadov realizácie:

- <u>**Používanie počítača, ovládanie použitého softvéru**</u>

- Žiaci sa rýchlo naučili a zvykli na ovládanie programu a pomerne bezpečne s ním aj pracovali.
- Síce boli na dualitu ovládania niektorých prípadov upozornení, ale niektorému žiakovi to aj neskoršie spôsobilo ťažkosti.

- <u>**Aplikačné schopnosti žiakov**</u>

- V priebehu výskumu sa ukázalo, že žiaci veľa vecí – čo sa už učili – nevedeli, resp. už zabudli (boli to menej často používané oblasti učiva ako napr. Tálesová kružnica a pod.), ale okrem vedomostných nedostatkov sme diagnostikovali aj ťažkosti aplikovania vedomostí. Boli to prípady, v ktorých sme mohli predpokladať, že žiaci majú dostatočné teoretické poznatky (predtým sme prebrali sériu ukážkových príkladov), ale žiakom nepodarilo sa im pospájať potrebné vedomosti k danej úlohe.†

q **<u>Vplyv počítačom podporovanej geometrie na prácu žiakov</u>**

- Myšlienka interaktívnej geometrie na začiatku sa zdala nepochopiteľnou pre žiakov, ale po niekoľkých hodinách už to porozumeli, akceptovali a používali automaticky.
- Žiaci rýchlo si tiež zvykli na overovanie správnosti riešenia a interaktívnosti konštrukcie pomocou zmien vo vstupných údajov. Tieto metódy verifikácie používali potom už prirodzene.
- U žiakov (okrem mikroprojetku „tancujúci domček“ a poslednej hodiny - animácie) sme nepozorovali väčšie ťažkosti realizácie svojich nápadov a myšlienok pomocou programu. V oblastiach, kde sme postupovali podľa pracovného materiálu nenastávala taká situácia, že žiaci síce úlohe z geometrického hľadiska porozumeli a našli k tomu aj postup riešenia, len to nevedeli v prostredí programu realizovať. To svedčí o tom, že nami zostavená zbierka úloh pracovného materiálu z tohto hľadiska vyhovuje praktickej použiteľnosti vo vyučovaní.

† Napr.: Pri Tálesovej kružnici na základe ukážky (12. príklad) sme si mysleli, že riešenie 13. úlohy bude pre žiakov jednoduché. Veď už videli, akú stopu zanecháva za sebou bod, z ktorého vidíme danú úsečku pod pravým uhlom. Uhádli, že táto množina bodov je kružnica, ktorá prechádza koncovými bodmi (*A*, *B*) danej úsečky a je súmerná vzhľadom na priamku *AB*. Na základe toho sme očakávali, že žiaci zostroja túto kružnicu. Žiaľ, žiaci neboli schopní kružnicu zostrojiť dovtedy, kým sme neurobili podrobný rozbor.

VÝSKUMNÝ PROJEKT 2

(POMOCOU SOFTVÉRU EUKLIDES NA VZORKE STREDOŠKOLSKÝCH ŠTUDENTOV)

Projekt bol zameraný na skúmanie vyučovania geometrie stredoškolského (gymnaziálneho) učiva pomocou softvéru Euklides. Našimi **hlavnými cieľmi** bolo skúmanie vzťahu študentov k vyučovaniu pomocou počítača, vyskúšať aplikovateľnosť metód problémového vyučovania a skupinovej práce, zozbierať skúsenosti z vyučovania pomocou uvedeného softvéru (aké sú reakcie študentov na interaktívnosť geometrických konštrukcií, ťažkosti ovládania programu, čo je a čo nie je pre študentov oproti naším očakávaniam problém, do akej miery sú schopní svoje myšlienky zrealizovať, atď.).

Termín konania: 9. 9. – 21. 10. 2002
Miesto konania: Gymnázium Hansa Selyeho v Komárne.
Účastníci: študenti 4. ročníka (trieda 4. c)
Spôsob realizácie: v rámci riadneho seminára z matematiky
Metóda výskumu: experiment s predtestom a posttestom [7]
Oblasti učiva: Predovšetkým konštrukčná časť planimetrie (viď ďalej)

Seminár, v rámci ktorého sme zrealizovali experiment, slúžil na opakovanie učiva a prípravu na maturitu. Študenti už absolvovali uvedené oblasti učiva počas prvého a druhého ročníka, čiže mohli sme predpokladať, že teoretickú časť majú zvládnutú. To bol prvý dôvod, prečo sme vybrali túto skupinu (študentov maturitného ročníka). Druhý dôvod bol veľmi prozaický - nechceli sme porušiť štruktúru vyučovania predmetu matematiky (časová náročnosť), z organizačného hľadiska bol jednoduchší takýto spôsob realizácie.

V krátkosti uvedieme tematické okruhy, s ktorými sme sa zaoberali:

- Základné elementy a konštrukcie euklidovskej geometrie

- Trojuholníky, významné prvky trojuholníka
- Geometrické miesta (množiny bodov danej vlastnosti)
- Konštrukcie trojuholníkov
- Zhodné o podobné zobrazenia
- Použitie Pytagorovej a Euklidových viet
- Kužeľosečky
- Problémové konštrukčné úlohy

Experimentu bolo venovaných sedem stretnutí v rámci dvojhodinových seminárov (90 min). Z toho prvé stretnutie slúžilo na napísanie predtestu a úvodu do ovládania programu v experimentálnej skupine. Na poslednej hodine sme napísali posttest, na ostatných hodinách sme sa zaoberali s uvedenými témami.

Dôvodom pomerne krátkeho trvania experimentu bol, že nechceli sme študentov zdržiavať v príprave na maturitu.

Na seminár bolo prihlásených 16 študentov. Po napísaní úvodného testu sme ich rozdelili do dvoch skupín, polovicu t.j. 8 študentov sme zaradili do experimentálnej skupiny. Zúčastnili sa na experimentálnom vyučovaní v počítačovej miestnosti školy. Podľa uvedenej tematiky sme preopakovali, resp. rozšírili učivo geometrie. Druhá polovica, kontrolná skupina pracovala pod vedením triedneho učiteľa matematiky (Keszeg I.) podľa podobného plánu v učebni, bez počítačov. Výber študentov prebiehalo viac-menej na základe dobrovoľnosti. Uskutočnené rozdelenie podľa triedneho učiteľa matematiky bolo spravodlivé, priemerne v obidvoch skupinách boli študenti s rovnakými (porovnateľnými) schopnosťami a vedomosťami.

Poznamenal by som, že chlapci mali oveľa väčší záujem o vyučovanie pomocou počítača (6 sa ich prihlásilo do exp. skupiny – všetci chlapci triedy!).

VII. 1. TESTOVANIE

Na kvantitatívne porovnanie výsledkov experimentálnej a kontrolnej skupiny sme vybrali metódu testovania. Úlohy úvodného a záverečného testu boli totožné, líšili sa iba v podmienkach vyplňovania: v predteste nebolo dovolené použitie rysovacích pomôcok, v postteste už áno, resp. žiaci experimentálnej skupiny mali možnosť používať počítač a používaný softvér Euklides.

Úlohy testu neboli zamerané na meranie konkrétnych (formálnych) poznatkov a vedomostí z geometrie. Cieľom testu bolo zistiť do akej miery sú študenti schopní používať a nájsť súvislosti medzi týmito vedomosťami, čiže zmerať stupeň schopnosti logicky a kreatívne (samostatne) pracovať.

Test sa skladal zo štyroch úloh. Ku každému bolo navrhnutých päť rôznych odpovedí (a, b, c, d, e), pričom v každej úlohe iba jedno možné riešenie bolo správne. Za každou úlohou bolo vynechané miesto pre prípadné náčrty a poznámky, ktoré však neboli povinné.

VII. 2. TEXT NAPÍSANÝCH TESTOV:

1) Stred opísanej kružnice trojuholníka leží

a) v každom trojuholníku vo vnútri trojuholníka.
b) v ostrouhlom trojuholníku vo vnútri, v pravouhlom trojuholníku na prepone, v tupouhlom trojuholníku mimo trojuholníka.
c) vo všeobecnom trojuholníku vždy mimo trojuholníka.
d) podľa tvaru trojuholníka: v ostrouhlom trojuholníku vo vnútri, v pravouhlom trojuholníku vo vrchole , v tupouhlom trojuholníku mimo trojuholníka.
e) ani jedna z týchto možností nie je pravdivá.

2) V trojuholníku *ABC* sú dané nasledujúce údaje:

v_a, t_a, c (výška na stranu *a* ,dĺžka ťažnice k strane *a*, a strana *c*).

Aké sú podmienky konštrukcie? Spravte diskusiu: nájdite kedy, koľko a aké riešenie dostaneme!

a) Trojuholník z týchto údajov je vždy skonštruovateľný.
b) Trojuholník sa dá zostrojiť vtedy a len vtedy, ak $c > t_a$ a $t_a \geq v_a$.

Ak $t_a = v_a$,tak riešenie je rovnoramenný trojuholník (b=c).

V ostatných prípadoch dostaneme dve rôzne riešenia a ich osovo súmerné obrazy.

c) Trojuholník sa dá zostrojiť, ak $c \geq v_a$ a $t_a \geq v_a$.

Ak $t_a = v_a$, tak riešenie je rovnoramenný trojuholník.

Ak $c = v_a$,tak riešenie je pravouhlý trojuholník a jeho osovo súmerný obraz; ak $c = t_a = v_a$, tak trojuholník nie je skonštruovateľný.

V ostatných prípadoch dostaneme dve rôzne riešenia a ich osovo súmerné obrazy.

d) Trojuholník sa dá zostrojiť vtedy a len vtedy, ak $t_a \geq c$ a $t_a \geq v_a$.

Ak $t_a = v_a$, tak riešenie je rovnoramený trojuholník.

Ak $c = v_a$,tak riešenie je pravouhlý trojuholník a jeho osovo súmerný obraz; ak $c = t_a = v_a$, tak trojuholník nie je skonštruovateľný.

V ostatných prípadoch dostaneme dve rôzne riešenia a ich osovo súmerné obrazy.

e) Trojuholník z týchto údajov sa nikdy nedá zostrojiť.

3) Čo je geometrické miesto všetkých ortocentier trojuholníka *ABC* kde body *A*, *B* sú pevnými bodmi danej kružnice a bod *C* je ľubovoľný bod tejto kružnice?

a) Hľadané geometrické miesto je elipsa s hlavnou osou AB.
b) Hľadané geometrické miesto je úsečka AB.
c) Hľadané geometrické miesto je osovo súmerný obraz danej kružnice (opísanej okolo trojuholníka ABC) podľa priamky AB, okrem bodov A,B.
d) Hľadané geometrické miesto je kružnica s priemerom AB.
e) Hľadané geometrické miesto je os úsečky AB.

4) V trojuholníku *ABC* sú dané nasledujúce údaje:

R, a, v_b (polomer opísanej kružnice, strana *a* a výška na stranu *b*).

Posúďte, aké geometrické miesta (kružnica, rovnobežky, os úsečky, os uhla, Tálesová kružnica, ...) a geometrické transformácie (zhodné transf.,

rovnoľahlosť ...) sú potrebné k tomu, aby sme mohli zostrojiť trojuholník.

a) Kružnica, rovnobežky.
b) Kružnica, os úsečky, Tálesová kružnica.
c) Kružnica, rovnobežky, rovnoľahlosť.
d) Kružnica, os úsečky, rovnobežky, rovnoľahlosť.
e) Iné.

VII. 3. PROTOKOLY Z JEDNOTLIVÝCH EXPERIMENTÁLNYCH VYUČOVACÍCH HODÍN

1. STRETNUTIE, 9. SEPTEMBER 2002

Tento seminár bol venovaný napísaniu predtestu (cca. 45 min), rozdeleniu triedy do dvoch skupín (experimentálna, kontrolná). Vo zvyšnom čase bol experimentálnej skupine prezentovaný geometrický softvér Euklides.

Výber do experimentálnej skupiny bol prispôsobený kapacite počítačovej miestnosti, čiže každý študent experimentálneho vyučovania mal prístup k „vlastnému" počítaču. Každý študent tejto skupiny spĺňal potrebné podmienky ovládania počítača (OS Windows 98 SE). Počas experimentu sme používali maďarskú jazykovú mutáciu voľne šíriteľnej verzie softvéru *Euklies 2.02*. Nakoľko ide o gymnázium s vyučovacím jazykom maďarským, prostredie programu nespôsobil jazykovú bariéru.

Už aj prezentácia programu prebiehala spôsobom objavovania: všetci študenti mali otvorené pracovné prostredie programu, a tak mali možnosť jednotlivé ovládacie, konštrukčné a formátovacie možnosti priamo v praxi vyskúšať. Prebrali sme potrebné hlavné ovládacie prvky (ovládanie pomocou počítačovej myšky a klávesnice), pomocou Hlavnej ponuky (Menu) a Panelu nástrojov (Ikony). Vyskúšali si pod vedením učiteľa zadať - zostrojiť, vymazať a skryť základné geometrické elementy (body, priamka, úsečka, kružnica, kružnica s polomerom, priesečník …), zmeniť štýl a farbu, zmeniť polohu zostrojených elementov. Objasnili sme okrem postupu zadávania konštrukcií (v Euklidese každá konštrukcia je vybudovaná na základe tzv. **základných bodov –** viď. ďalej) **rozdiel medzi zmazaním a skrytím** a pojem **interaktívnosti**. Podrobná ukážka vyskúšanie všetkých možností programu nebolo možné z časových dôvodov. Preto nevyskúšané, ale potrebné možnosti sme ukázali postupne pred samotným používaním.

POZNÁMKY A KOMENTÁRE

Výsledky predtestu mienime zhrnúť po popise a analýze jednotlivých experimentálnych hodín spolu s výsledkami posttestu.

Počas úvodnej hodiny sme nezískali väčšie množstvo informácií, ale môžeme skonštatovať, že študenti privítali počítačom podporovaný prístup k geometrii pozitívne, prejavili záujem a k daným problémom zaujali aktívny postoj. Ovládanie pomocou ikoniek brali prirodzene a kládli k jednotlivým možnostiam konštruktívne otázky.

2. STRETNUTIE, 16. SEPTEMBER 2002

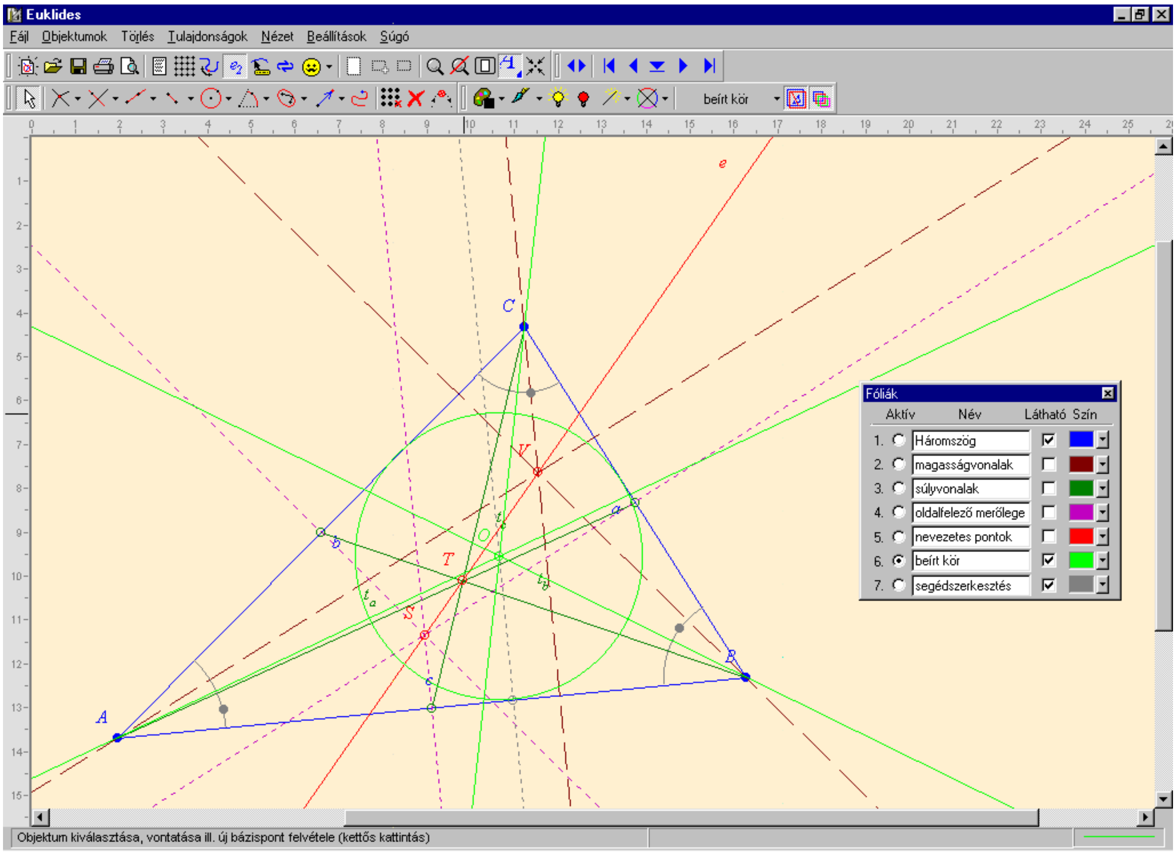
Seminár bol venovaný čiastočne ešte možnostiam programu viazaným už s učivom geometrie: vlastnosti trojuholníkov. Zaoberali sme sa s významnými prvkami trojuholníkov (výšky, ťažnice, osi strán a vnútorných uhlov, ortocentrum, ťažnica, stred opísanej, vpísanej a stredy pripísaných kružníc).

Všetky prvky sme zostrojili do jedného trojuholníka, bez toho, aby sme stratili prehľadnosť a orientáciu. Ako je to možné?

Použili sme tzv. fólie, špeciálnu možnosť programu Euklides. Tie nám umožňujú, aby jednotlivé čiastkové konštrukcie boli umiestnené v rôznych vrstvách, ktorých viditeľnosť vieme jednoducho vypínať resp. zapínať. Jednotlivé vrstvy môžeme aj farebne odlíšiť (automaticky).

Na základe toho sme rozdelili konštrukciu na 7 vrstiev (obr. VII. 1):

1. fólia: <u>Trojuholník</u> *ABC*. Označili sme vrcholy a strany podľa obvyklého označenia (stranu proti vrcholu *A* sme označili ako *a*, …). Trojuholník môžeme v programe zvoliť rôznymi spôsobmi. My sme uprednostňovali tie jednoduchšie: zadali sme tri ľubovoľné nekolineárne body a spojili sme ich úsečkami alebo s polygónom. Túto fóliu sme nechali počas práce vždy viditeľnou.



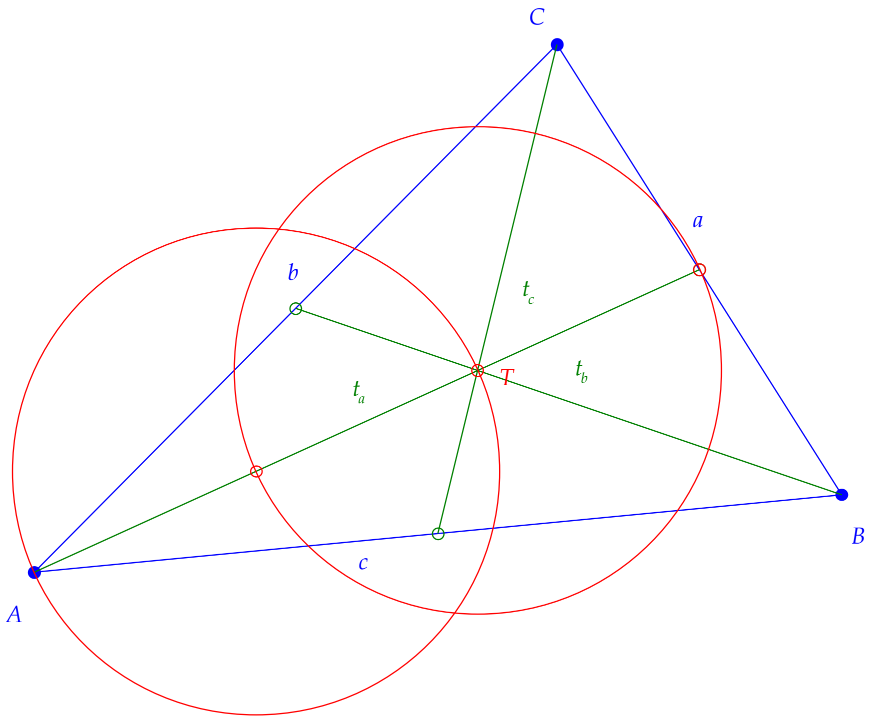
obr. VII. 1

2. fólia: <u>Výšky</u>. Zostrojili sme ich ako priamky, ktoré prechádzajú vrcholom a sú kolmé na protiľahlú stranu. Hľadali sme vzájomnú polohu týchto troch priamok. Študenti vedeli, že tieto priamky prechádzajú jedným bodom. Samozrejme, konštrukcia s tým bola v súlade. Výhodou interaktívnej konštrukcie bolo, že študenti mohli jednoducho a interaktívne zmeniť tvar trojuholníka a mohli sa presvedčiť o všeobecnej platnosti tohto tvrdenia. Dokonca bolo možné vyšetriť aj to, že aká je závislosť medzi tvarom trojuholníka a polohou priesečníka výšok, ktorý sme nazvali ortocentom (V) a umiestnili na 5. fóliu.

3. fólia: <u>Ťažnice</u>. Podobne ako v prechádzajúcom prípade zostrojili sme ich podľa definície (spojíme stredy strán s protiľahlým vrcholom), vyšetrili sme ich vzájomnú polohu (v každom prípade prechádzajú jedným bodom – ťažiskom), atď. ; ťažisko (T) sme dali tiež na 5.fóliu.

Odznela otázka na ďalšie vlastnosti ťažiska. Po krátkom experimentovaní študenti prakticky overili, že ťažisko leží vždy vo vnútri trojuholníka. Pritom jeden z nich spomenul aj vetu, podľa ktorej ťažisko rozdeľuje ťažnice v pomere 1 : 2. Boli vyzvaní, aby to overili pomocou počítača. Po niekoľkých minútach (cca. 2-3) rozmýšľania a nerealizovateľného nápadu (meranie – táto verzia však ešte neobsahuje žiadne meracie možnosti) ten istý študent ohlásil, že našiel „riešenie“:

„Stačí overiť len pre jednu ťažnicu, pre ostatné to musí platiť analogicky. Pre jednu ťažnicu to overíme nasledovne: zostrojíme kružnicu so stredom v bode T, ktorá prechádza stredom strany. Tá nám pretne ťažnicu v bode, ktorý bude stredom druhej kružnice a tá prechádza bodom T, teda bude mať rovnaký polomer ako prvá. Druhá kružnica avšak prechádza cez vrchol. To znamená, že ťažnica je rozdelená na tri rovnaké úsečky a z toho už priamo vyplýva naše tvrdenie. Ak zmeníme tvar trojuholníka vidíme, že situácia sa prakticky nezmení, čiže tvrdenie musí mať všeobecnú platnosť.“



obr. VII. 2

4. fólia: Osi strán. Podobne ako v prechádzajúcich prípadoch zostrojili sme ich podľa definície (buď pomocou priamej možnosti alebo najprv stredy a potom kolmice v týchto bodoch), vyšetrili sme ich vzájomnú polohu (v každom prípade prechádzajú jedným bodom – označili sme ho ako S a dali na 5.fóliu.)

5. fólia: Významné body. Ako už to bolo napísané, na tejto fólii sa nachádzali tri body: V, T a S. Študenti dostali za úlohu nájsť stred opísanej kružnice. Niekoľkí tipovali na ťažisko, ale ostatní ich presvedčili, že to bude bod S. To bola dobrá príležitosť, aby sme zopakovali geometrické miesta. Os strany a je množina všetkých bodov, ktoré majú od bodu B a C tú istú vzdialenosť, bod S (ako priesečník týchto osí) má od všetkých vrcholov tú istú vzdialenosť, čiže na kružnici so stredom S a polomerom SB ležia všetky vrcholy. (Tým bolo vlastne dokázané aj to, že všetky osi prechádzajú jedným bodom.)

Ďalšia otázka učiteľa bola zameraná na vzájomnú polohu troch bodov *S, T* a *V*. Väčšina študentov tvrdila, že tieto body ležia na jednej priamke. Jeden z nich sa však oponoval a tvrdil, že v jeho prípade na obrazovke tie body tak „nevyzerajú". Na posúdenie sme zostrojili priamku SV. Po konštrukcii aj náš oponent uznal, že bod T naozaj leží na priamke SV, teda tieto body sú naozaj kolineárne (na overenie sme zväčšili obrázok). Zmenili sme tvar trojuholníka s otázkou, či to platí všeobecne? Študenti experimentálne prišli na to, že ak tvar trojuholníka priblíži k rovnostrannému trojuholníku, uvedené tri body sú totožné, a tak pre rovnostranný trojuholník táto (Eulerova) priamka zmizne. V ostatných prípadoch, ale týmito troma bodmi prechádza práve jedna priamka.

6. fólia: Osi vnútorných uhlov, vpísaná kružnica. Konštrukcie sme štartovali príkazom: Zostrojme kružnicu vpísanú do trojuholníka! Stred vpísanej kružnice (O) musí byť od jednotlivých strán rovnako vzdialený. Množina bodov, ktoré majú od dvoch priamok rovnakú vzdialenosť je os uhla. Priesečník osí teda vyhovuje našim požiadavkám stredu vpísanej kružnice. Osi uhlov vieme zostrojiť dvoma spôsobmi. Buď vyznačíme najprv uhol (pomocou oblúka) a potom necháme program zostrojiť os toho uhla, alebo klasicky pomocou kružníc. Študentom boli prezentované obidva možnosti. Vybrali si tú druhú. Ku konštrukcii vpísanej kružnici bol potrebný ešte jeden krok – nájsť dotykový bod, resp. polomer kružnice, čo bolo dosť častým prameňom chýb. Viacerí si totiž mysleli, že dotykový bod bude priesečník strany s osou. Pri hľadaní chyby sme postupovali interaktívnou zmenou tvaru trojuholníka, pri príliš pravidelných trojuholníkoch totiž nebolo dosť viditeľné, či táto kružnica pretína strany alebo sa ich dotýka. Dotykový bod a s tým aj polomer sme našli nakoniec tak, že sme spustili kolmicu z bodu O na jednu stranu.

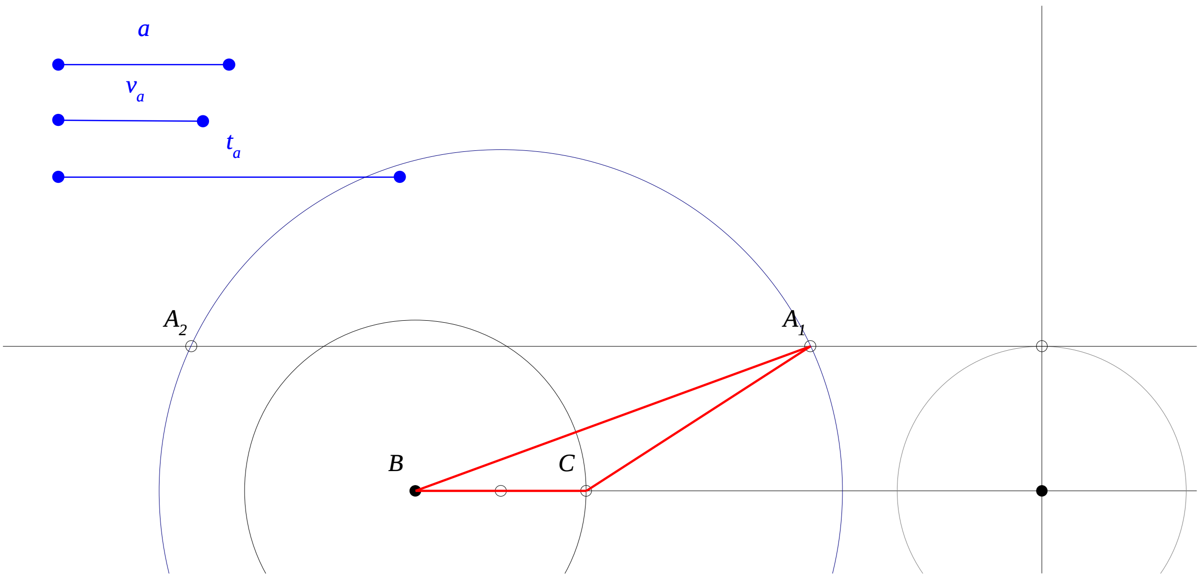
Samozrejme, počas práce kvôli prehľadnosti bola vypnutá viditeľnosť nepotrebných čiastkových konštrukcií na prislúchajúcich fóliách. Napr. počas konštrukcie vpísanej kružnice boli zapnuté len fólie 1 a 6.

Vo zvyšnom čase sme vyriešili ešte jednu konštrukčnú úlohu zameranú na konštrukciu a konštruovateľnosť trojuholníkov.

Zadanie: Zostrojte trojuholník ABC, ak sú dané: a, v_a , t_a.

Údaje v tomto prípade neboli dané ako trojica čísiel, ktorými by boli reprezentované príslušné dĺžky (učebnicové príklady), ale ako tri úsečky, tri interaktívne zmeniteľné vzdialenosti.

Postup konštrukcie: na jednu ľubovoľnú polpriamku nanesieme dĺžku a (takto sme dostali body B a C), zostrojíme rovnobežku vo vzdialenosti v_a. Zostrojíme stred strany BC, potom s týmto stredom a polomerom t_a kružnicu. Priesečníkom rovnobežky s touto kružnicou bude hľadaný tretí vrchol trojuholníka (viď obr. VII. 3).



obr. VII. 3

Diskusiu sme uskutočnili pomocou experimentovania. Zistili sme, ktoré vstupné údaje ovplyvňujú počet riešení úlohy. So zmenou dĺžky strany a síce zmeníme tvar riešenia, ale riešiteľnosť úlohy už nie. Z pozorovania situácie však vieme usúdiť podmienky konštruovateľnosti:

$t_a < v_a$ rovnobežka a kružnica nemajú spoločný bod, úloha je nemá riešenie,

$t_a = v_a$ rovnobežka a kružnica majú jeden spoločný bod, za riešenie dostaneme rovnoramenný trojuholník.

$t_a > v_a$ rovnobežka kružnicu pretína v dvoch spoločných bodoch, dostaneme dve riešenia v jednej polrovine.

V tomto prípade sme povedali, že zhodné riešenia nepovažujeme za rôzne.

POZNÁMKY A KOMENTÁRE

Študenti ešte mali menšie ťažkosti s ovládaním programu, nakoľko hľadali potrebné konštrukčné ikony v ponukách. Tieto ťažkosti pretrvávali aj na nasledujúcom seminári.

Ukázalo sa, že študenti síce získali poznatky v spomínanej oblasti v rámci stúdia, ale na veľa vecí sa už nepamätali, alebo mali o nich len formálne vedomosti. Svedčí o tom aj udalosť, že nevedeli, ktorý bod je stredom opísanej kružnice – len tipovali (5.fólia). Robili to napriek tomu, že tesne predtým sme charakterizovali geometrické miesto akým je os úsečky.

Na druhej strane však musíme vyzdvihnúť kreatívny postoj študenta pri overovaní tvrdenia, že ťažisko rozdeľuje ťažnice v pomere 1 : 2 (3. fólia). Z geometrického hľadiska ďalším nežiadajúcim javom je to, že väčšina študentov v geometrii rozmýšľa príliš metricky, číselne. Študenti navrhovali najprv odmerať príslušné vzdialenosti, ale program taký nástroj nemá. Neuvedomili si, že kružidlo slúži tiež na prenášanie zhodných úsečiek!

Ďalšia poznámka sa týka postoja pri konštrukciách osí vnútorných uhlov: študenti uprednostnili klasickú euklidovskú metódu konštrukcie namiesto programom navrhnutou „umelou" metódou (6. fólia). Pripomenieme ďalej že študenti mali možnosť vizuálne sa presvedčiť o tom, že ich konštrukcia je naozaj chybná a preto sa ani učiteľovo vysvetlenie sa nestal dogmou.

3. STRETNUTIE, 23. SEPTEMBER 2002

Seminár bol venovaný geometrickým miestam a konštrukcii trojuholníka z troch prvkov. Vo zvyšnom čase sme našli „rysované riešenie" jednej úlohy s metrickým zadaním pomocou počítača.

1. úloha

Zadanie: Zostrojte trojuholník *ABC*, ak sú dané: a, v_a, α.

Údaje ani v tomto prípade neboli dané metricky ako trojica čísel, ktorými sú reprezentované príslušné dĺžky a uhol, ale ako úsečky, resp. uhol medzi dvoma polpriamkami alebo úsečkami – interaktívne zmeniteľné vstupné údaje.

Uvedenú úlohu sme riešili spoločne. Študenti po prvých neúspešných pokusoch požiadali o pomoc, ktorú však dostávali len v malých častiach, aby motivácia objavovania ostala živá. Túto komunikáciu medzi vyučujúcim (U) a študentmi (S) uvedieme vo forme dialógu tak, ako to odznelo.

Rozbor: Po načrtnutí situácie sme dostali dva rôzne nápady.

- Podľa prvého zvolíme si úsečku *BC* tak, aby mala danú dĺžku, zostrojíme rovnobežku s ňou vo vzdialenosti v_a. Potom treba nájsť geometrické miesto všetkých bodov, z ktorého vidíme úsečku *BC* pod tým istým, daným uhlom. Spoločný bod týchto množín bodov vyhovuje požiadavkám pre vrchol *A*.
- Podľa druhého najprv zostrojíme uhol s veľkosťou α a s vrcholom *A*. Potom budeme hľadať na ramenách také body *B* a *C*, ktoré majú danú vzájomnú vzdialenosť a s nimi určená priamka má od bodu *A* tiež danú vzdialenosť.

Popis dialógu:

U: Ktorý z navrhnutých postupov bude podľa Vás skôr realizovateľný?

S_1: Ten prvý.

U: Prečo?

S_1: Podľa druhého postupu body *B, C* musia vyhovovať dvom rôznym podmienkam, nestačí nájsť také body, ktoré sú od seba vzdialené na dĺžku a …

Po dôslednom predebatovaní tejto problematiky sme prešli na realizáciu prvého postupu:

U: Ako by sme mohli nájsť miesto všetkých bodov, z ktorého vidíme úsečku BC pod tým istým, daným uhlom? Čo bude k tomu potrebné?

S: ??? (pozerajú nechápavo, beznápadne)

U: Vedeli by ste úlohu riešiť, ak namiesto ľubovolného uhla by bolo dané α ako pevná hodnota $\alpha = 90°$?

S: Áno! (presvedčivo)

U: Áno? Ako?

S: Pomocou Tálesovej kružnice…

U: Správne! Prečo?

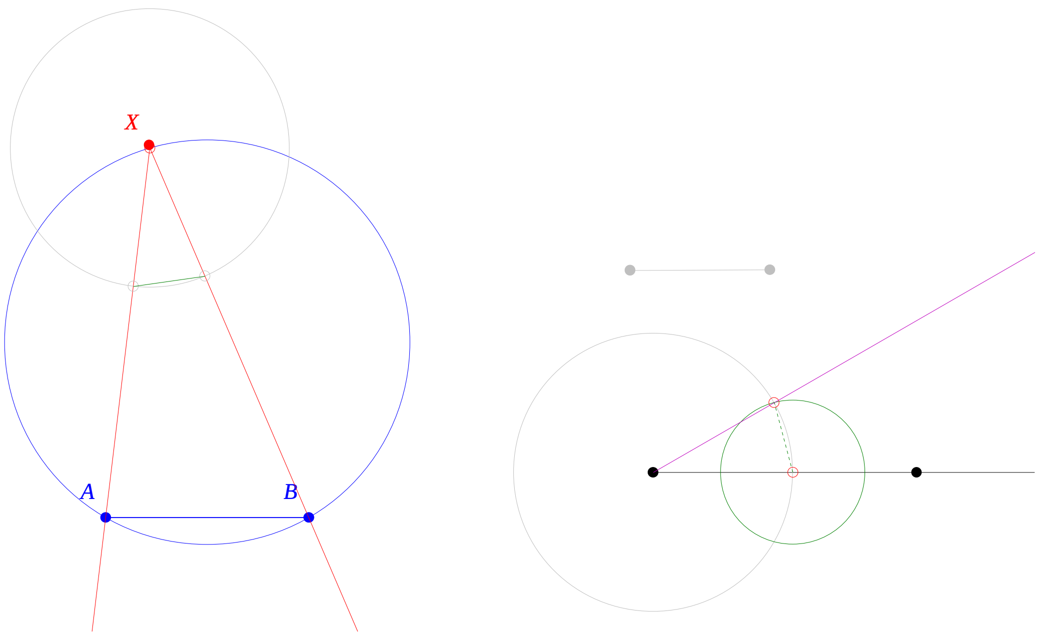
S: Lebo z každého bodu Tálesovej kružnice vidíme úsečku pod pravým uhlom!

U: Hľadané geometrické miesto je teda v tomto prípade kružnica. Čo sa stane, v čom sa líši situácia, ak $\alpha \neq 90°$?

S: … (ticho, bez nápadov) … - po chvíľke:

S_3: Aj vtedy to bude kružnica! Už sa na to pamätám. Bude to kružnica, z ktorej vidíme úsečku pod daným uhlom.

U: Presvedčíme sa o tom pomocou nasledujúcej, už prichystanej pomocnej konštrukcie:



obr. VII. 4

U: Teraz už poznáme hľadané geometrické miesto, aspoň to: čo je to. Ďalšou otázkou je, že ako ho zostrojiť?

S: ???

U: Už sa na to nepamätáte?

S: Nie.

U: Tak to objavme!

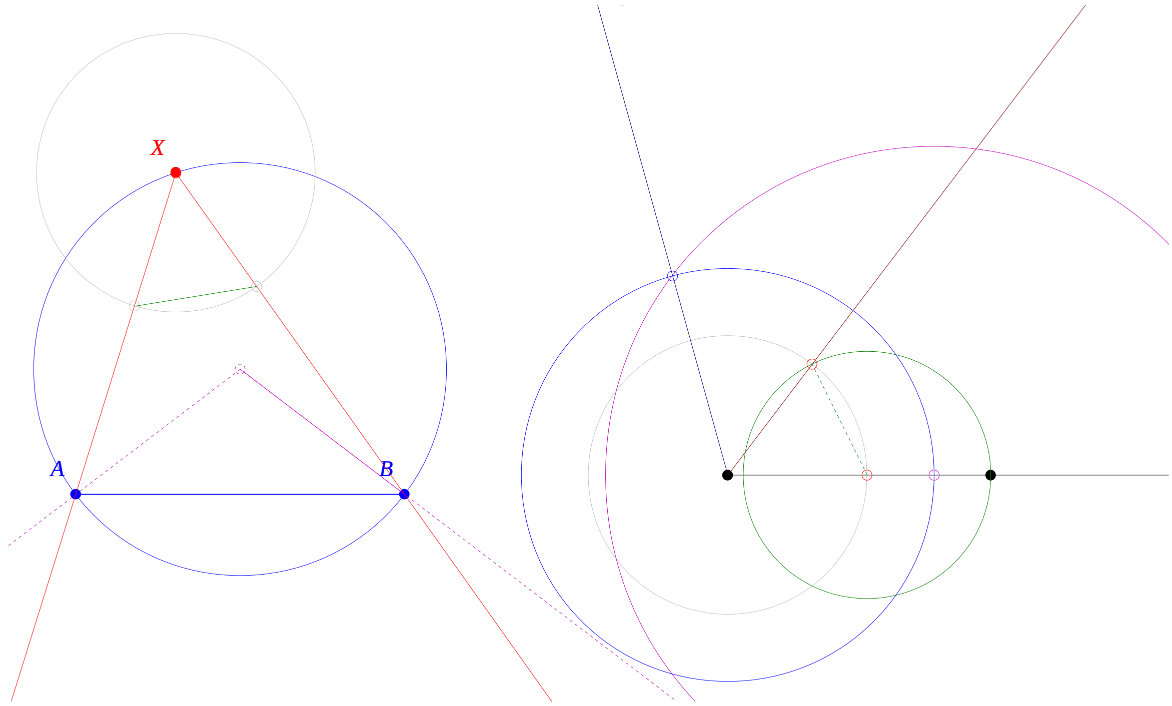
Ako sa nazýva uhol AXB v prechádzajúcej konštrukcií?

S_3: Obvodový uhol…

U: A čo o ňom vieme?

S_1: že je polovica stredového uhla.

Overili sme to pomocou programu.



obr. VII. 5

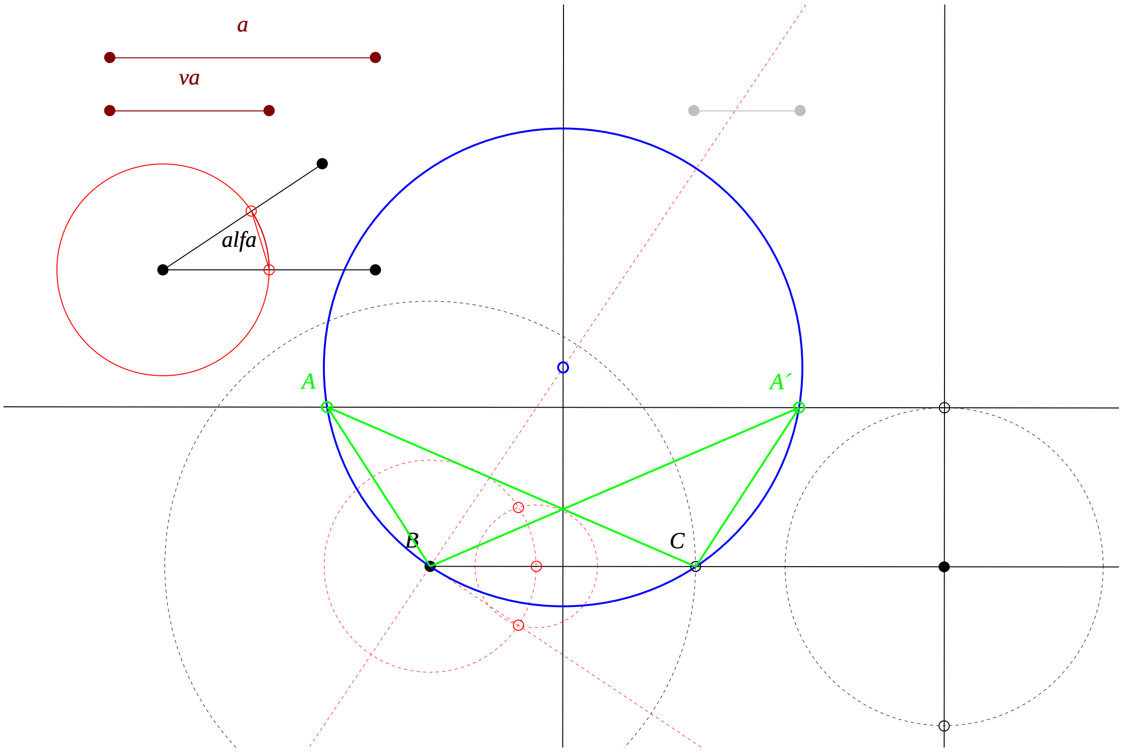
S využitím pomocnej konštrukcie sme našli postup ako zostrojiť geometrické miesto bodov, z ktorého vidíme úsečku pod daným uhlom.

U: Teraz už sme schopní zostrojiť pôvodnú úlohu?

S: Áno. (jednoznačne)

U: Tak to realizujme!

Študenti zostrojili:



obr. VII. 6

U: Od čoho závisí teraz riešiteľnosť úlohy?

S: ???

U: Vyskúšajme zmeniť vstupné údaje…

S2: (po vyskúšaní) Ak zmeníme výšku tak, že rovnobežka nepretne kružnicu, tak nedostaneme riešenie.

U: Nemôžeme to dosiahnuť so zmenou veľkosti uhla?

S: (po vyskúšaní) Samozrejme aj tak sa to dá…

U: Nevieme medzi nimi nájsť ešte nejaký špeciálny prípad?

S: (po chvíľke) Ak výška trojuholníka bude presne taká istá ako „výška“ kružnice, tak dostaneme len jeden taký vrchol *A*.

U: V tomto prípade aký trojuholník dostaneme?

S: Rovnoramenný.

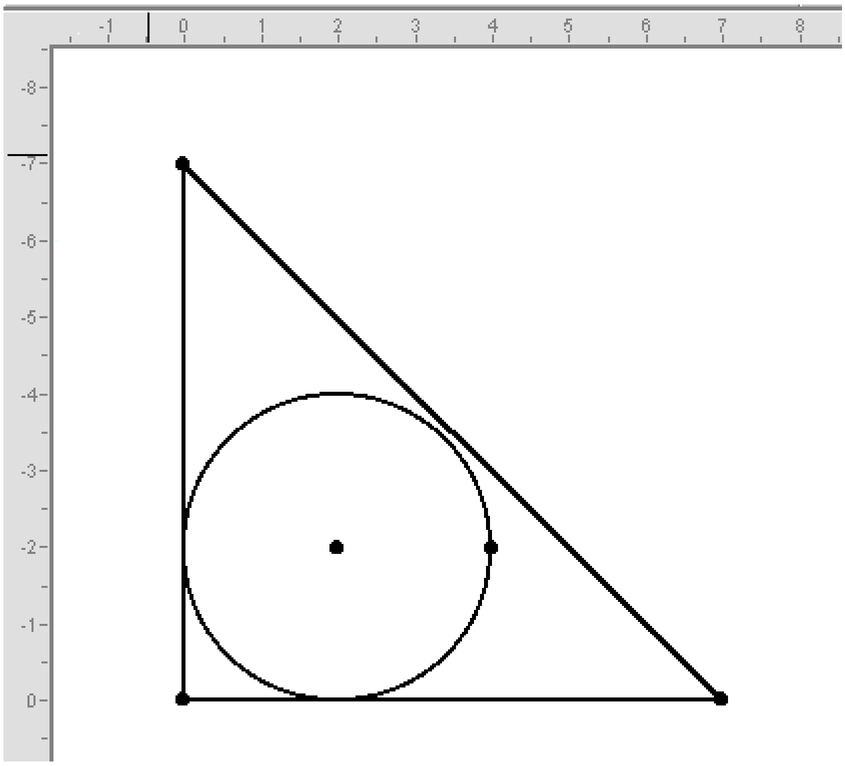
Diskusia úlohy, ako je vidno, bola realizovaná taktiež dialógom medzi vyučujúcim a študentmi.

2. úloha

Zadanie: Daný je kruh s polomerom 2 cm. Vieme tento kruh vložiť do pravouhlého trojuholníka s odvesnami dĺžky:

a) 7 cm, 7 cm;
b) 8 cm, 6 cm;
c) 9 cm a 5 cm?

Využili sme možnosť programu „Mriežka“, v ktorej je možné zvoliť bázové body len v uzlových bodoch mriežky.



obr. VII. 7

Ako vidno aj z obrázku, v prvom prípade je odpoveď na otázku kladná. Ak chceme odpovedať na druhú a tretiu časť úlohy, nemusíme znovu zostrojiť zadanie, stačí, keď v tom istom obrázku vhodne zmeníme odvesny (druhé tvrdenie je pravdivé, tretie už nie).

Na otázku, či môžeme uznať takúto metódu riešenia z matematického hľadiska za korektnú a opodstatnenú, študenti odpovedali jednoznačne nie. Verili vlastným očiam a programu, ale oproti výpočtovému riešeniu úlohy, narysovanú situáciu nepovažovali za exaktný matematický dôkaz – riešenie!

K výpočtovému riešeniu je potrebné použiť súvislosti medzi polomerom vpísanej kružnice, obvodom a obsahom trojuholníka. Študenti tento vzťah nepoznali (alebo ho už zabudli), preto sme tento vzťah odvodili. K vyjadreniu obvodu pomocou odvesien bolo potrebné aplikovať aj Pytagorovu vetu.

Na základe toho sme vyriešili príklad aj výpočtom. Samozrejme, výsledky výpočtu v plnej miere súhlasili so „zostrojeným riešením".

POZNÁMKY A KOMENTÁRE

Seminár slúžil na to, aby sme si preverili, či je možné realizovať vyučovanie problémových situácií počítačom podporovanou formou. V riešení prvej úlohy sme mohli predpokladať, že hľadanú množinu študenti budú poznať, ale ukázalo sa, že už zabudli. Komunikácia medzi vyučujúcim a študentmi prebiehala vo forme dialógu. Študentom nebol prezradený celý postup, ale boli k riešeniu postupne krok za krokom vedení. Predpokladáme, že takto dosiahnuté vedomosti sú komplexnejšie a trvalejšie.

Podobne, ako počas predchádzajúceho seminára, aj tu sme zistili, že študenti nie sú schopní rozmýšľať v súvislostiach, upredností ujú radšej sématicke metódy riešenia úloh, ich vedomosti sú neúplné a miestami aj formálne.

Na druhej strane zaujímavým sa ukázalo riešenie druhej úlohy: počítačom kreslenému dôkazu síce verili, ale na základe učených algoritmov ho už nepovažovali za matematicky korektné riešenie - dôkaz.

4. STRETNUTIE, 30. SEPTEMBER 2002

Seminár bol zameraný na konštrukciu trojuholníkov pomocou geometrických miest bodov. Organizačná forma hodiny: problémové vyučovanie v skupinovej práci. Vytvorili sme dvojice. Každá dvojica dostala jednu úlohu; mala svoj počítač, mala možnosť osobne konštruovať a overovať hypotézy, ale pri hľadaní riešenia mali v rámci dvojici kooperovať. Takto, čo sa neskôr ukázalo, si navzájom doplňovali poznatky, skúsenosti a nápady.

Zadania: Zostrojme trojuholník ABC, ak sú dané:

1) $a, v_a, t_{b;}$
2) $a+c, \beta, v_{a;}$
3) $a+b+c, \alpha, v_a$
4) a, t_b, R

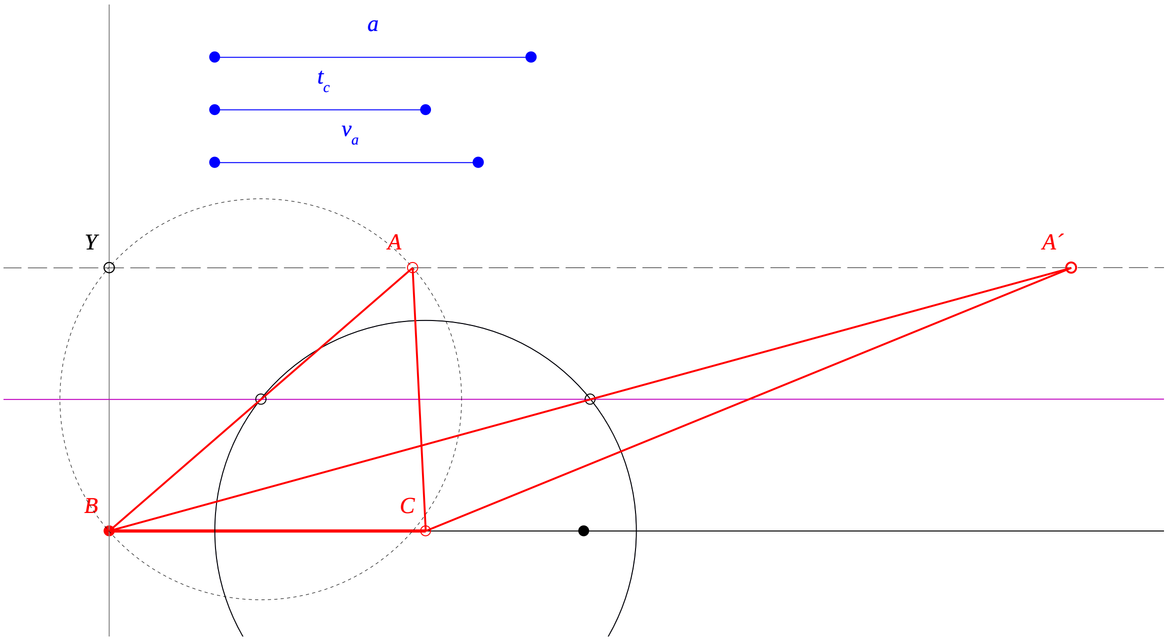
Postup riešenia úloh sa veľmi nelíšil od štandardných metód (náčrt, rozbor, konštrukcia, popis postupu, diskusia). Rozdiel spočíval v tom, že po prvé: pri správne zostrojenom interaktívnom náčrte vidíme priamo v akcii (pri pohybe vybranými objektami) súvislosti medzi jednotlivými prvkami – pomoc pri rozbore; po druhé: je to veľmi užitočné pri hľadaní počtu riešení, resp. konštruovateľnosti danej úlohy. Tieto možnosti môžeme považovať za výhody. Na druhej strane pri istých študentoch sa objavil nečakaný problém: plán – postup na zostrojenie mali dobre, ale (niektoré kroky) nevedeli uskutočniť pomocou programu. Túto chybu spôsobilo nedostatočné ovládanie softvéru.

1. <u>skupina</u> (úloha ΔABC: $a, v_a, t_{b;}$)

Voľba vstupných údajov, ako aj konštrukcia úsečky AB a rovnobežky v danej vzdialenosti podľa prechádzajúcich úloh, už bola pre študentov jednoduchá. Úlohu sa im podarilo vyriešiť a zostrojiť správne po jednom neúspešnom pokuse nápadu aj bez „pomoci“ vyučujúceho. Chybu neúspešnej koncepcie našli tiež sami: učiteľ im nepovedal, či riešenie je správne alebo kde spravili v postupe chybu. Ukázal len, čo sa stane, ak experimentálne zmeníme vstupné údaje. Na základe toho študenti tejto skupinky korigovali konštrukciu. (Chybu v konštrukcii zapríčinila deformácia pojmu ťažnice – pomýlili si ťažnicu s výškou.)

Konštrukciu znázorňuje obr. VII. 8.

Študenti pomocou programu našli aj súvislosť medzi určujúcimi elementmi, ktorí ovplyvňujú počet riešení. (Relácie <, =, > medzi t_c a $\frac{v_a}{2}$ determinujú skonštruovateľnosť a počet riešení.)



obr. VII. 8

Po úspešnom riešení sa táto dvojica venovala 3. úlohe, ktorá bola z navrhnutej štvorice najnáročnejšia.

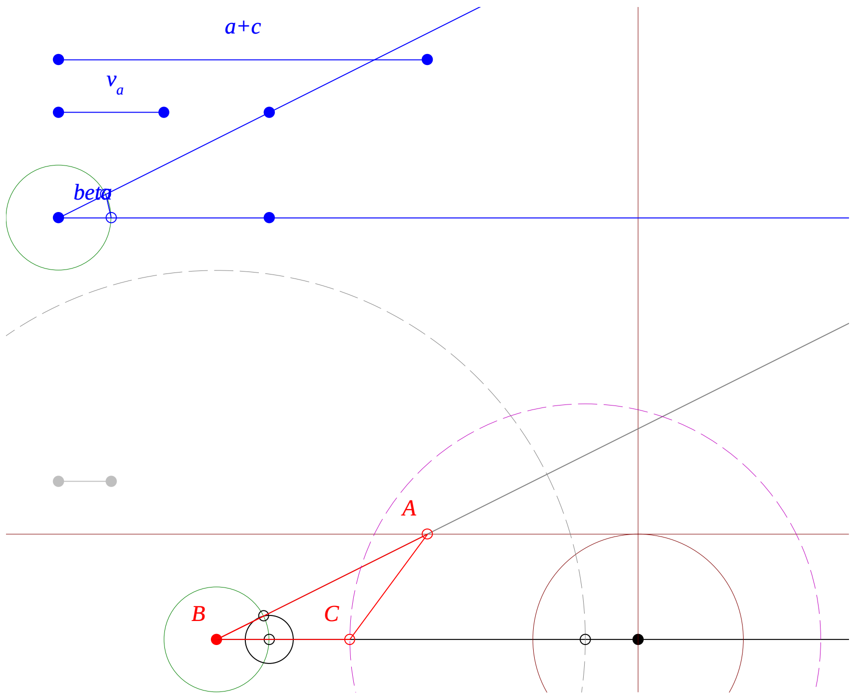
2. <u>skupina</u> (úloha ΔABC: $a+c$, β, v_a;)

Študenti našli veľmi elegantné riešenie úlohy, z daných údajov vedeli zostrojiť totiž stranu AB. Zvolenie vstupných údajov, ako aj prenášanie uhla a konštrukcia rovnobežky v danej vzdialenosti, už bolo podľa prechádzajúcich úloh pre nich jednoduché. Preniesli najprv uhol, zostrojili rovnobežku s jedným ramenom uhla vo vzdialenosti v_a , tak dostali stranu AB. K dĺžke strany BC bolo potrebné odmerať dĺžku AB z $a+c$.

Konštrukciu znázorňuje obr. VII. 9.

Úloha má očividne jedno riešenie, avšak ako sa to experimentálne zistilo, úloha nemá riešenie, ak $a+c$ je kratšie, ako zostrojená strana AB.

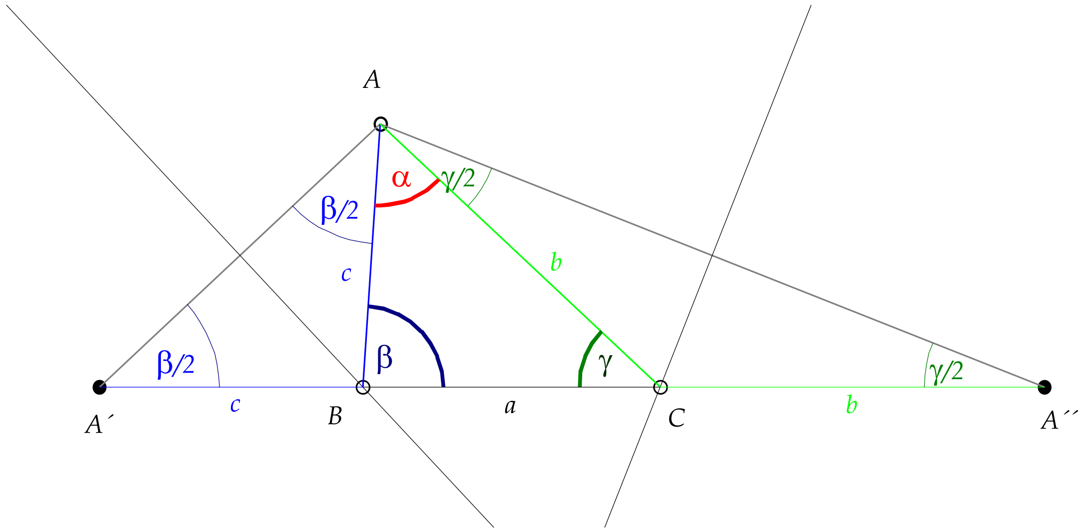
Po úspešnej konštrukcií sa členovia tejto skupinky venovali tiež 3. úlohe.



obr. VII. 9

3. <u>skupina</u> (úloha ΔABC: $a+b+c$, α, v_a)

Táto úloha bola medzi ostatnými asi najnáročnejšia, študenti nevedeli bez pomoci učiteľa spraviť ani použiteľný rozbor. Pôvodný náčrt sme rozšírili o body A' a A'', ktorých vzdialenosť je daný obvod $a+b+c$ (viď nasledujúci obrázok).



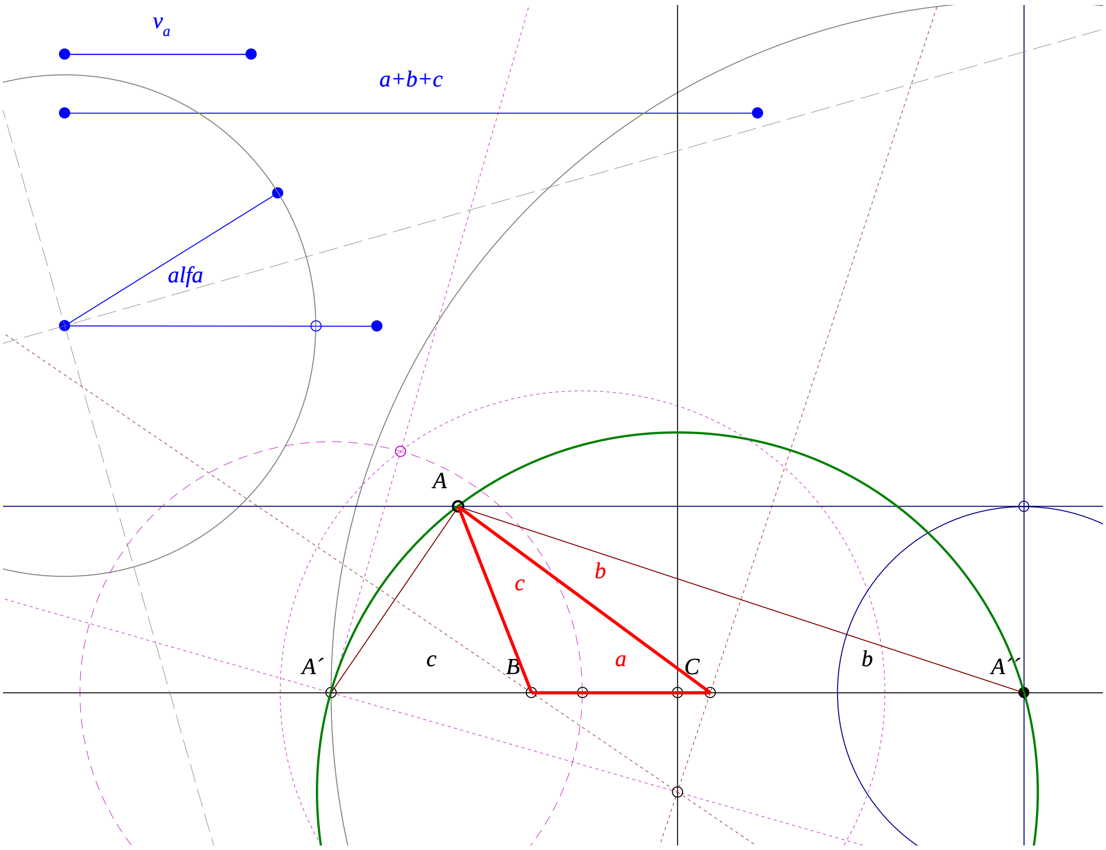
obr. VII. 10

Ako vidno z náčrtu veľkosť uhla $A'AA''$ je $\alpha + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}$, ktorá sa rovná $\frac{\alpha}{2} + 90°$. Pôvodnú úlohu sme takto pretransformovali na podobnú úlohu, akú sme riešili na prechádzajúcom seminári – konštrukcia trojuholníka $A'AA''$: je daná strana $A'A''$, výška na túto stranu a protiľahlý uhol.

Zostali tu však ešte dve čiastkové úlohy: zostrojiť uhol $\frac{\alpha}{2} + 90°$, ak poznáme uhol veľkosti α, respektívne nájsť vrcholy B, C po zostrojení trojuholníka $A'AA'$.

Uhol $\frac{\alpha}{2} + 90°$ zostrojíme tak, že najprv zostrojíme os uhla a graficky pripočítame pravý uhol (kolmica).

Trojuholníky $A'AB$ a $A'CA''$sú rovnoramenné, čiže vrcholy B resp. C ležia na osiach ich základní $A'A$ resp. $A'A''$. Ak teda vieme zostrojiť trojuholník $A'AA''$, tak vieme zostrojiť aj trojuholník ABC.

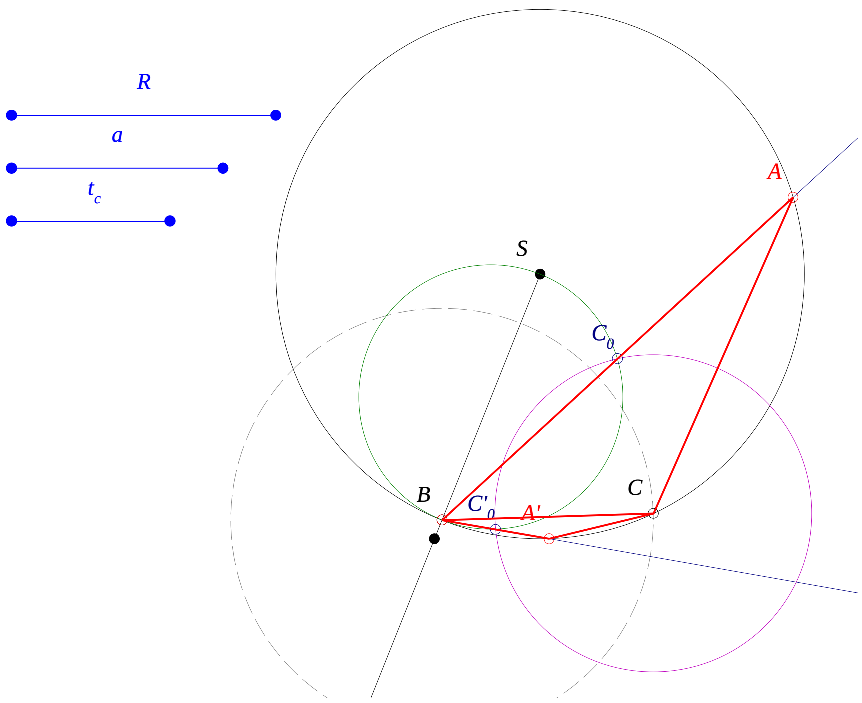


obr. VII. 11

4. <u>skupina</u> (úloha ΔABC: a, t_b, R)

Členovia dvojice prišli na myšlienku, že bude potrebné zostrojiť kružnicu k s polomerom R a takú tetivu, ktorá má dĺžku strany a. Objavil sa tu čiastkový problém zadania ľubovolného bodu kružnice, nakoľko softvér takú možnosť nepodporuje (nevieme priamo zvoliť bod na útvare). Túto ťažkosť sme prekonali kolektívne, lebo naším cieľom bolo, aby všetci vedeli používať takéto ovládateľské „triky“. Jedným spôsobom, ako zvoliť bod na kružnici bolo zostrojiť polpriamku so začiatkom v strede (S) danej kružnice a vyznačiť jej priesečník s kružnicou (je to bod kružnice). Nech takto zvolený bod je označený ako B, tak ďalší vrchol (C) dostaneme zostrojením kružnice so stredom B a polomerom a.

S použitím tretieho údaju, ťažnice t_c však študenti boli beznápadný a preto podľa náčrtu sme spravili spoločný rozbor. Na základe učiteľových usmernení zistili ako môžu dostať bod C_0, stred strany AB (Od bodu C je vzdialená t_c a priamka SC_0 je kolmá na stranu AB. Museli teda použiť kružnicu a Tálesovú kružnicu nad SB.).



obr. VII. 12

Podľa uvedeného rozboru zostrojili úlohu a dostali dve rôzne riešenia. Ako sme zistili experimentovaním, jedno riešenie stratíme, ak $t_c = 2a$. Úloha nie je riešiteľná, ak t_c je väčšia ako polomer opísanej kružnice (R).

POZNÁMKY A KOMENTÁRE

Seminár slúžil prvotne na skúmanie toho, či by sa dalo takýmto spôsobom (v organizačnej forme skupinového vyučovania) vyučovať aj v rámci bežných vyučovacích hodín. Uplatnenie takéhoto spôsobu výučby vidíme z praktického hľadiska najmä v diferencovaných triedach, kde by mohol učiteľ jednotlivým skupinkám na rôznych vedomostných úrovniach venovať primeraní čas a pozornosť ako aj z odborného tak aj didaktického hľadiska. Takto organizovaná práca môže mať pozitívny efekt, ale pre učiteľa je to veľmi náročné: napr. ihneď musí reagovať na rôzne otázky, pomáhať študentovi, aby sa necítil opustený, ale nesmie riešiť problémy namiesto neho. Cieľom tejto metódy je popri dosiahnutí istých vedomostí aj doviesť študenta k samostatnému objaviteľskému a kritickému mysleniu.

V tomto konkrétnom prípade si môžeme získané skúsenosti zhrnúť nasledovne:

Prvá dvojica síce úlohu dosť šikovne vyriešila, ale zistili sme zase zmätok medzi pojmami: zostrojili kružnicu s polomerom ťažnice t_c, ale hľadali k nej dotyčnicu, akoby to bola výška. Po niekoľkých otázkach sa ukázalo, že vedia čo je ťažnica, len si to „pomýlili". So zmenou vstupných údajov sme názorne ukázali na chybu konštrukcie, ktorú členovia skupiny odhalili, a následne opravili.

Originálnym nápadom vyriešili študenti úlohu v 2. skupine. Úlohu bolo možné riešiť podobným spôsobom ako v treťom príklade. Taký bol vlastne aj zámer experimentátora, ale pred takýmto riešením však ustúpil od pôvodného postupu.

V tretom príklade bolo nutné v rozbore úlohy pomáhať, bez toho by študenti sami asi neprišli na plán konštrukcie. Žiaľ, aj po rozbore im bolo potrebné pomôcť a opraviť ich konštrukciu, úloha bola na hranici ich vedomostí a schopností.

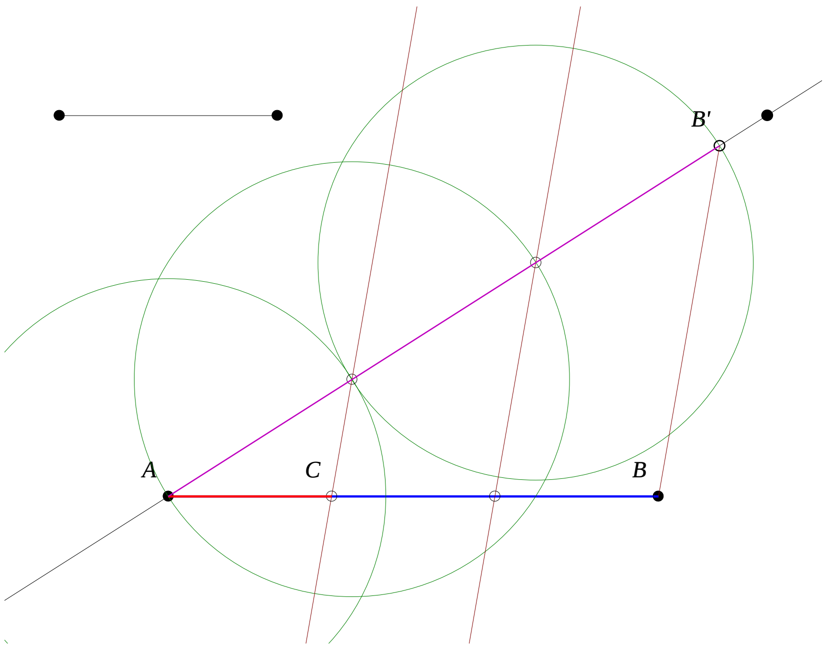
Vo štvrtom príklade sme našli dve problémové oblasti. Prvá sa týkala zadania bodu kružnice – to súviselo s ovládaním programu. Druhá už bola geometrickejšia: dialógom (s kladením vhodných otázok) boli privedení k riešeniu (Čo je ťažnica? Ako môžeme zostrojiť stred opísanej kružnice? Aké vlastnosti majú osi strán trojuholníka?…).

Za úspech hodiny môžeme považovať, že v istých prípadoch študenti boli schopní svoje dosiahnuté výsledky pomocou programu aj samostatne prekontrolovať, kriticky zhodnotiť správnosť konštrukcie a na základe toho svoje chybné kroky opraviť.

5. STRETNUTIE, 7. OKTÓBER 2002

Seminár bol zameraný na „metrické" konštrukcie (konštrukcia „racionálnej časti" dĺžky, zostrojenie úsečky iracionálnej dĺžky, „odmocniny a mocniny" danej dĺžky, zostrojenie grafu mocninovej funkcie).

Počas konštrukcií sme v niektorých prípadoch potrebovali racionálnu časť nejakej danej úsečky, napríklad tretinu ťažnice. Aj v takýchto prípadoch môžeme interaktívne zostrojiť potrebnú dĺžku. Tieto euklidovské konštrukcie sa dajú realizovať pomocou rovnoľahlosti. Zostrojili sme takto najprv tretinu úsečky *AB*. Zostrojili sme ľubovolnú priamku prechádzajúcu bodom *A*, na ktorú sme namerali pomocou kružidla trikrát po sebe tú istú pomocnú úsečku. Túto, na tri rovnaké časti rozdelenú úsečku AB′, sme premietli rovnobežne na *AB* v smere *BB′*. Zostrojený bod C rozdeľoval *AB* v pomere 1:2, čiže dĺžka *AC* bola naozaj tretinou dĺžky *AB*.



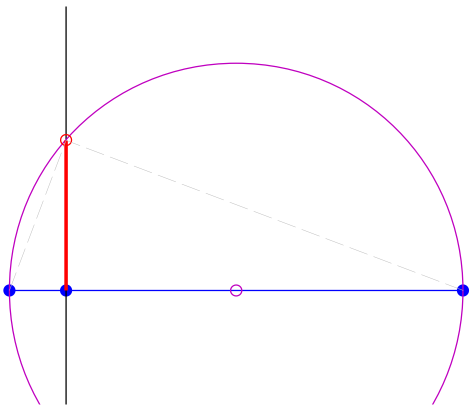
obr. VII. 13

Študenti na základe uvedenej konštrukcie vyslovili tvrdenie, že sme schopní zostrojiť každú racionálnu časť danej úsečky podľa načrtnutého algoritmu. Analogicky sme zostrojili (cvične) dve pätiny dĺžky danej úsečky.

K ďalším konštrukciám sme potrebovali jednotkovú dĺžku. Tú môžeme síce ľubovolne zvoliť a jej prirodzené násobky sa dajú zostrojiť tiež euklidovsky, ale môžeme použiť aj zabudovanú mriežku. To znamená že v zapnutom mriežkovom režime vieme zadávať len uzlové body mriežky (mriežková konštanta je predvolene nastavená na 1 cm). Takto vieme zadávať úsečky prirodzenej dĺžky. Na základe uvedených sme hľadali úsečky s nasledujúcimi dĺžkami: $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}$, a ďalšie.

Študenti prišli na to, že v tomto prípade môžeme využiť Pytagorovú vetu. V prípade konštruovania dĺžky $\sqrt{2}$ ($\sqrt{5}$) je potrebné zostrojiť pravouhlý trojuholník s odvesnami 1 a 1 (resp. 1 a 2), preponou trojuholníka bude úsečka s hľadanou dĺžkou. Nie v každom prípade je však konštrukcia taká jednoduchá. Napríklad úsečku dĺžky $\sqrt{3}$ môžeme zostrojiť len pomocou dvojnásobnej aplikácie Pytagorovej vety: zostrojíme úsečku dĺžky $\sqrt{2}$ - to bude jedna odvesna a druhá bude mať jednotkovú dĺžku. Zistili sme algoritmus, podľa ktorého vieme zostrojiť dĺžku $\sqrt{n+1}$, ak $\sqrt{n}$ už máme zostrojenú.

Konštrukcia takéhoto typu pre isté hodnoty je dosť zdĺhavá, napr. k zostrojeniu dĺžky $\sqrt{7}$ potrebujeme najmenej trikrát po sebe aplikovať algoritmus, preto boli študenti dovedení k použitiu Euklidovej vety o výške trojuholníka. (Päta výšky pravouhlého trojuholníka spustená na preponu rozdelí preponu na dve úsečky, ktorých súčin dĺžok sa rovná druhej mocnine tejto výšky.) Na obrázku VII. 14 je znázornená konštrukcia dĺžky $\sqrt{7}$:

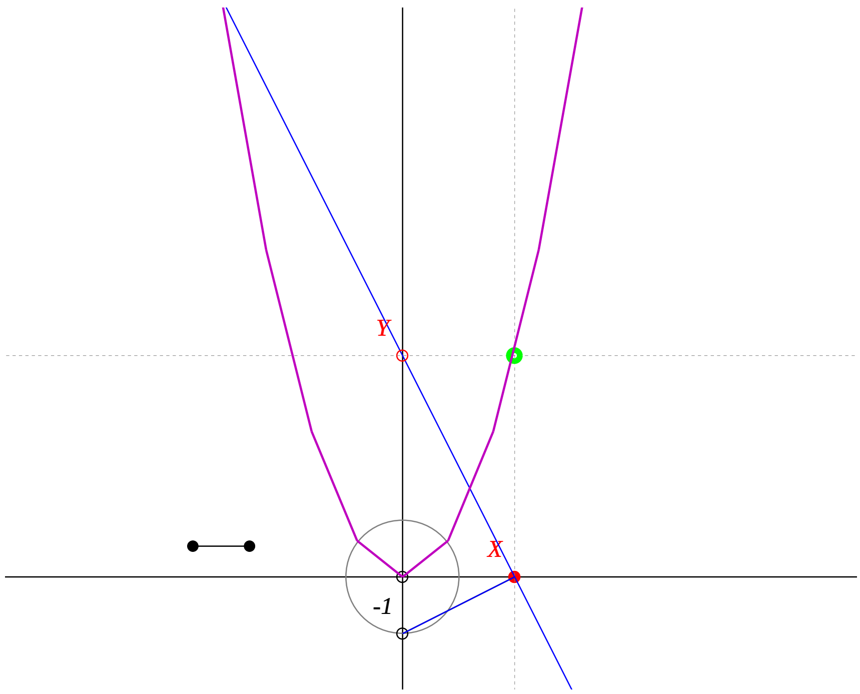


obr. VII. 14

V horeuvedených prípadoch sme zostrojovali „odmocninové dĺžky“ len celých čísel. Ako by sme mohli zostrojiť úsečku, ktorej dĺžka sa rovná hodnote odmocniny z dĺžky naznačenej úsečky?

Podobnou konštrukciou, akú sme používali dovtedy, sme mohli použiť aj naďalej. (Zvolenú úsečku predlžíme, nameriame tam jednotku a nad predĺženou úsečkou zostrojíme Tálesovú kružnicu. Na mieste predĺženia pôvodnej úsečky zostrojíme kolmicu. Priesečník Tálesovej kružnice s kolmicou spojíme s koncovým bodom úsečky na predĺženej strane – táto úsečka bude mať hľadanú dĺžku.)

Použitím tejto vety môžeme zostrojiť aj takú úsečku, ktorej dĺžka sa rovná druhej mocnine dĺžky vyznačenej úsečky. V tomto prípade by sme použili dve kolmé priamky (vlastne súradnicové osi), na jednu (napr. na vertikálnu) nanesieme jednotku, na druhú nanesieme ľubovolnú dĺžku (vzdialenosť ľubovolného bodu (X) priamky od počiatku súradnicového systému; bod na priamke sme si zvolili pomocou kolmého priemetu bodu na priamku). Jednotkový bod na jednej osi a bod X na druhej určujú úsečku. Na tú úsečku zostrojíme kolmicu v bode X, ktorá pretne prvú priamku v bode Y. Vzdialenosť bodu Y od začiatku súradnicového systému je druhá mocnina vzdialenosti bodu X od toho istého začiatku súradnicového systému (obr. VII. 15).



obr. VII. 15

Ak zostrojíme bod s týmito súradnicami, dostaneme bod kvadratickej krivky. Môžeme pomocou programu vykresliť aj stopu tohto bodu, ako je to zobrazené na obrázku.

6. STRETNUTIE, 14. OKTÓBER 2002

Posledný seminár, na ktorom prebiehalo ešte vyučovanie, bol zameraný na geometrické transformácie (skladanie zhodných transformácií) a na teóriu kužeľosečiek. Program Euklides umožňuje totiž priame zostrojenie obrazov bodov podľa rôznych geometrických transformácií.

Preopakovali sme vlastnosti zhodných transformácií. Začali sme s osovou súmernosťou. Zostrojili sme obraz bodu vzhľadom na os, potom aj obraz trojuholníka.

Vyskúšali sme **skladanie dvoch osových súmernosti**, zobrazovali sme trojuholník *ABC* postupne podľa osí *1* a *2*.

$$ABC \xrightarrow{1} A_1B_1C_1$$

$$A_1B_1C_1 \xrightarrow{2} A_2B_2C_2$$

Hľadali sme výsledné zobrazenie: $ABC \xrightarrow{?} A_2B_2C_2$

Študenti zistili, že výsledok závisí od vzájomnej polohy osí *1* a *2.*

a) Predpokladali sme, že osi *1* a *2* sú rôznobežné.

Vyznačili sme priesečník osí (*S*). Zostrojili sme kružnice so stredom *S* a polomermi $|SA|$, $|SB|$, $|SC|$. Zistili sme, že všetky body *A* (*B*, *C*) s rôznymi indexmi ležia na jednej kružnici.

Teda $|SA| = |SA_2|$, $|SB| = |SB_2|$, $|SC| = |SC_2|$.

Nastavili sme jednu z osí súmerností tak, aby ju bolo možné otáčať okolo bodu *S.* Pri otáčaní osi študenti zistili, že aj obraz trojuholníka sa s ním viazane otáča.

Spojením uvedených skúseností sme skonštatovali, že výsledné zobrazenie bude otáčanie (rotácia) so stredom *S*. Uhol otáčania sme usúdili podľa interaktívne meniaceho sa obrázku a podľa špeciálnych prípadov: bude to dvojnásobok uhla priamok *1* a *2*. (Študentská otázka: Čo je uhol dvoch priamok?)

Na základe toho sme našli dva krajné, špeciálne prípady:

- osi *1* a *2* sú totožné (uhol 0°): aj obraz trojuholníka je totožný so vzorom (identické zobrazenie).
- osi *1* a *2* sú na seba kolmé (uhol 90°): všetky priamky určené ľubovolným bodom a jeho obrazom prechádzajú stredom otáčania *S*. Obrazom trojuholníka bude jeho stredovo súmerný obraz. (Kolmosť osí sme zabezpečili pomocou možnosti Mriežka.)

b) Predpokladali sme, že osi *1* a *2* sú rovnobežné; rovnobežnosť osí sme zabezpečili tiež pomocou možnosti Mriežka.

Aj v tomto prípade sme zostrojili pomocné priamky, ktoré boli určené vzorom a obrazom bodu. Ako bolo vidno, všetky tieto priamky bol vzájomne rovnobežné a kolmé na osi súmernosti. Na základe toho a podľa interaktívne meniaceho sa obrázku sme zistili, že dostaneme posunutý obraz trojuholníka. Teda výsledné zobrazenie je posunutie. Smer posunutia je kolmý na osi súmernosti (orientácia: smerom od *1* ku *2*), veľkosť posunutia je dvojnásobok vzdialenosti dvoch osí.

Zhrnuli sme pre študentov: skladanie dvoch osových súmernosti v závislosti od vzájomnej polohy osí môže byť otočenie, stredová súmernosť alebo posunutie. Toto tvrdenie môžeme však aj obrátiť: Každé otočenie, stredovú súmernosť a posunutie vieme vyjadriť ako skladanie dvoch vhodných osových súmerností.

Vyskúšali sme ešte **skladanie dvoch stredových súmernosti**, zobrazovali sme trojuholník ABC postupne podľa stredov S_1 a S_2.

$$ABC \xrightarrow{S_1} A_1B_1C_1$$

$$A_1B_1C_1 \xrightarrow{S_2} A_2B_2C_2$$

Hľadali sme, čo bude výsledné zobrazenie: $ABC \xrightarrow{?} A_2B_2C_2$

Zostrojené pomocné čiary, ktorými bol spojené body ako vzory so svojimi príslušnými obrazmi. Ako študenti zistili, všetky úsečky boli vzájomne rovnobežné a rovnako dlhé. Na základe toho a podľa interaktívne meniaceho obrázku zistili, že dostaneme posunutý obraz trojuholníka.

Výsledné zobrazenie bolo posunutie. Smer posunutia bol určený S_1S_2; študenti si pamätali z nižších ročníkov, že veľkosť posunutia je dvojnásobok vzdialenosti S_1S_2.

Ako sme to mohli overiť? Na základe nápadu jedného študenta sme zostrojili dve kružnice so stredmi v bodoch A, A_2 (resp. B, B_2; C, C_2) a polomerom S_1S_2. Obidve kružnice pretínali úsečku $A\ A_2$ v tom istom bode – v strede a to na ľubovolnú polohu vrcholov trojuholníka a stredov súmerností.

Ďalej sme vyskúšali ešte **skladanie troch stredových súmerností**, zobrazovali sme trojuholník ABC postupne podľa stredov S_1, S_2 a S_3.

$$ABC \xrightarrow{S_1} A_1B_1C_1$$

$$A_1B_1C_1 \xrightarrow{S_2} A_2B_2C_2$$

$$A_2B_2C_2 \xrightarrow{S_3} A_3B_3C_3$$

Hľadali sme, čo bude výsledné zobrazenie: $ABC \xrightarrow{?} A_2B_2C_2$

Aj v tomto prípade bol postup analogický ako predtým: Zostrojili sme pomocné čiary spájajúce vzory s príslušnými obrazmi bodov (AA_3, BB_3, CC_3). Študenti spozorovali, že všetky úsečky prechádzali jedným bodom, ktorý sme označili ako S. Nasledujúca otázka bola: Od čoho závisí poloha bodu S?

A, B, C - po zmene polohy týchto bodov zistili, že ich umiestnenie v rovine nemá žiadny vplyv na polohu bodu S

S_1, S_2, S_3 - zmena polohy ľubovolného zo stredov súmernosti má priamy vplyv na umiestnenie bodu S. Závislosť bodu S mohli priamo otestovať. Analogicky ako v prechádzajúcich úlohách doplnili obrázok priamkami a úsečkami S_1S_2, S_2S_3, S_3S, SS_1, pričom ich odlíšili nejakou výraznou farbou. Protiľahlé strany, ako to videli na obrazovke, boli rovnobežné, teda štvoruholník $S_1S_2S_3S$ bol rovnobežníkom.

Záver, ktorý vyslovili podľa interaktívne sa meniaceho obrázku bol, že skladaním troch stredových súmerností dostanú stredovú súmernosť, so stredom vo štvrtom vrchole rovnobežníka určeného pomocou daných troch stredov.

Vo zvyšnom čase sa študenti ešte zaoberali s kužeľosečkami. Bol im vysvetlený pôvod názvu, že odkiaľ pochádza ich klasifikácia a uviedli sme aj ich ohniskové definície. Dokonca kvôli lepšiemu pochopeniu sme ich aj zostrojili pomocou programu. Spolu so študentmi sme zistili, že úsečka, ktorá sa rovná súčtu sprievodičov, musí byť u elipsy väčšia, u hyperboly menšia, ako vzdialenosť ohnísk. S programom môžeme zostrojiť aj všeobecnú kužeľosečku zadanú piatimi bodmi. Interaktívnou zmenou určujúcich bodov môžeme tvar kužeľosečky plynulo meniť od elipsy cez parabolu k hyperbole a späť.

POZNÁMKY A KOMENTÁRE

Zloženie zhodných transformácií je učivom stredných škôl, ale ide o dosť náročnú oblasť geometrie vzhľadom a abstrahovanie a predstavivosť. Často ani absolventi vysokých škôl učiteľského zamerania si ich nevedia používať v praxi. Preto bola táto oblasť vybratá do experimentu. Postupným aplikovaním transformácie istého typu sme „odvodili" a vizualizovali teoretické poznatky. Študenti experimentálnej skupinky sami zostrojili jednotlivé (opísané) typy skladania zhodných transformácií a hľadali ich špeciálne prípady. Prejavili nadšenie z objavov pri takomto heuristickom spôsobe a očividne sa im takéto skúšanie geometrických súvislostí páčilo. Dúfame, že takýmto interaktívno-vizuálnym spôsobom sme odstránili dogmatický prístup v tejto oblasti a študenti lepšie pochopili hĺbku predkladaných súvislostí.

Posledný tematický blok bol zameraný na vlastnosti kužeľosečiek. Dôvodom k zaradeniu tejto témy do experimentu bol ten, že na stredných školách sa študenti stretnú s kužeľosečkami len v rámci analytickej geometrie a pod pojmom kužeľosečka vidia len ich algebraické vyjadrenie vo forme rovníc. Ukázali sme, že sú to vlastne geometrické miesta bodov (množiny bodov danej vlastnosti), ktoré môžeme definovať aj bez analytického zápisu.

7. STRETNUTIE, 21. OKTÓBER 2002

Tento seminár bol venovaný napísaniu posttestu (cca. 45 min). Písali ho študenti obidvoch skupín. Samotný test od napísaného predtestu sa nelíšil v príkladoch, jediný rozdiel spočíval v tom, že pri práci mali možnosť používať pomôcky. V kontrolnej skupine to boli rysovacie pomôcky (pravítko, kružidlo) a v experimentálnej skupine počítač vybavený s programom Euklides.

VII. 4. VYHODNOTENIE VÝSKUMNÉHO PROJEKTU 2

Opísaný výskumný projekt môžeme vyhodnotiť z dvoch hľadísk:

- § <u>Vyhodnocovaním testov</u> (predtestu a posttestu); porovnávanie počtu správnych riešení, analýza podľa jednotlivých príkladov. Štatistické overovanie (testovanie) pracovných hypotéz si odpustíme vzhľadom na neopodstatnenosť výsledkov, ktorá vyplýva z malej vzorky.
- § <u>Sumarizovaním vlastných skúseností z experimentálneho vyučovania</u>; na základe uvedených protokolov sa pokúsime odpovedať na vierohodnosť východiskových hypotéz, zosumarizujeme výhody, nevýhody i zaujímavosti takéhoto vyučovania a uvedieme niekoľko študentských názorov.

ANALÝZA TESTOV

Nasledujúce tabuľky obsahujú rozdelenie študentských výsledkov.

<u>Úvodný test</u> – vyhodnotenie

Test napísal 16 študentov

Príklad	**Odpovede**					Neodpovedali	Správne riešenie	Úspešnosť (%)
	a.)	**b.)**	**c.)**	**d.)**	**e.)**			
1)	0	15	0	0	1	0	**b.)**	93,75
2)	1	8	3	2	1	1	**c.)**	18,75
3)	4	2	4	3	2	1	**c.)**	25
4)	0	10	0	4	1	1	**b.)**	62,5

<u>Záverečný test</u> – vyhodnotenie – <u>Experimentálna skupina.</u>

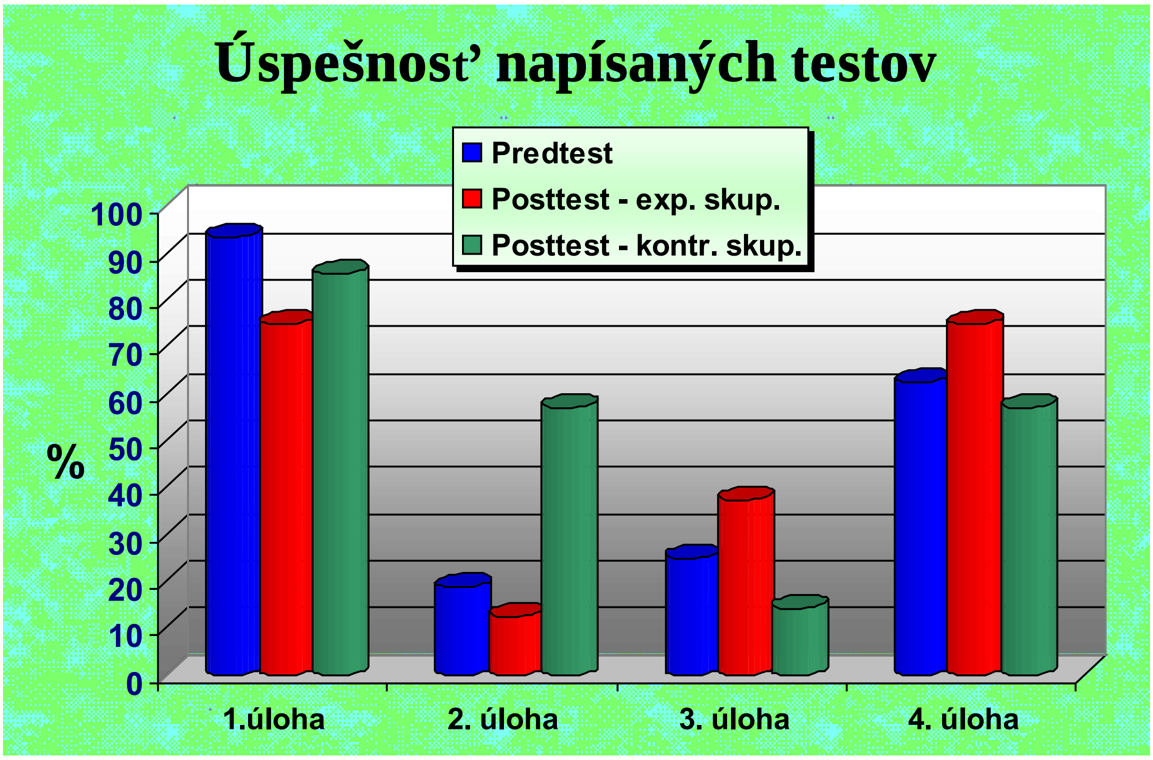
Test napísal 8 študentov

Príklad	**Odpovede**					Neodpovedali	Správne riešenie	Úspešnosť (%)
	a.)	**b.)**	**c.)**	**d.)**	**e.)**			
1)	1	6	0	0	1	0	**b.)**	75
2)	1	3	1	0	3	0	**c.)**	12,5
3)	2	1	3	1	0	1	**c.)**	37,5
4)	0	6	0	1	0	1	**b.)**	75

<u>Záverečný test</u> – vyhodnotenie – <u>Kontrolná skupina</u>

Test napísal 7 študentov

Príklad	**Odpovede**					Neodpovedali	Správne riešenie	Úspešnosť (%)
	a.)	**b.)**	**c.)**	**d.)**	**e.)**			
1)	1	6	0	0	0	0	**b.)**	85,71
2)	0	0	4	3	0	0	**c.)**	57,14
3)	4	0	1	1	0	1	**c.)**	14,28
4)	0	4	2	1	0	0	**b.)**	57,14



grafy úspesnosti testov

1. úloha

Môžeme ju považovať za najjednoduchšiu z testových úloh, študenti sa už stretli s príslušnými pojmami a používali ich aj v súvislostiach. Mali vedieť ako konštrukčne dostaneme stred opísanej kružnice. Pomocou myšlienkového pokusu, alebo s vyšetrením uvedených tvarov trojuholníka mohli dospieť k správnemu riešeniu. K výsledkom testov by sme dodali, že v experimentálnej skupine 1 študent označil možnosť **e.)**, podľa neho ani jedna z navrhnutých možností nie je úplne správna a doplnil ju špeciálnym prípadom, čo však už nebolo správne. Ak považujeme aj toto riešenie za správne, tak úspešnosť narastie na hodnotu 86,5%, ktorá je už úplne porovnateľná s dosiahnutými výsledkami v ostatných skupinách.

Počas predtestu k úlohe 10 študentov načrtlo nejakú skicu a počas posttestu len jeden študent v kontrolnej skupine.

2. úloha

Ako vidno z tabuliek a z grafu, dostali sme neočakávané výsledky: totiž vôbec nekorešpondujú s nami predpokladanými hypotézami. Úloha bola zostavená vedome tak, aby alternatívy jednotlivých odpovedí objasnili komplexnú štruktúru študentských vedomostí, okrem geometrických poznatkov potrebovali vedomosti aj z výrokovej algebry. Kľúč riešenia spočíval v matematickej logike: bolo treba nájsť taký výrok, ktorý neobsahoval spor. K tomu boli nutné a postačujúce dve podmienky: $c \geq v_a$ a $t_a \geq v_a$ – odpoveď **c)**. Teda odpovede **a)** a **e)** nemôžu byť správnymi, vo zvyšných odpovediach máme ekvivalenciu, ale v podmienke nie sú vyčerpané všetky prípady. V následných častiach podmienok – počet riešení – spor už síce nenachádzal ani v odpovedi **b)** a **d)**, avšak neboli ani úplnými.

Dôvod všeobecnej nízkej úspešnosti (~25%) úlohy predpokladane spočíval v tom, že študenti nie sú zvyknutí na takéto podrobné diskusie konštrukčných úloh.

Počas písania predtestu 12 zo 16 študentov nakreslilo nejakú skicu, čiže vizualizáciu situácie väčšina študentov (3/4) považovala za potrebnú.

V experimentálnej skupine sme dostali neočakávane malú úspešnosť a veľký rozptyl odpovedí. Pozorovaním práce študentov počas písania posttestu sme zistili, že, žiaľ, študenti nepoužili program na jednoduché testovanie a overovanie riešiteľnosti úlohy (zostrojiť ľubovoľný trojuholník, vyznačiť príslušné prvky a postupnou zmenou tvaru trojuholníka usudzovať jednotlivé výroky), ale snažili sa zostrojiť trojuholník z daných prvkov.

V tomto príklade však mohli by otestovať riešiteľnosť aj iným spôsobom: napr. tak, že zvolia ľubovolný trojuholník v ktorom vyznačia dané údaje. Jednoduchým interaktívnym experimentovaním dalo by sa ukázať, aké súvislosti musia platiť, ak úloha je riešiteľná (zvolíme trojuholník *ABC* vyznačíme, resp. aj farebne odlíšime údaje v_a, t_a, c; zostrojením pomocnej kružnice so stredom v bode *A* a polomerom v_a môžeme znázorniť, že dĺžky t_a a c musia byť väčšie ako v_a. Analogicky by sa dalo ukázať, že porovnávanie dĺžok t_a a c neovplyvní skonštuovateľnosť trojuholníka …).

V kontrolnej skupine tiež neočakávane pomerne veľká časť študentov vybrala správnu odpoveď. Zvyšok vybral možnosť **d)**, čo bolo v porovnávaní s experimentálnou skupinou veľmi zaujímavé, lebo tam ani jeden z nich nevybral túto odpoveď. Dôvod veľkej úspešnosti v tejto skupine nepoznáme.

3. úloha

Išlo tiež o nezvyčajnú úlohu, ktorá v značnej miere potrebuje geometrickú predstavivosť, hlavne ak nemôžeme používať ani pomôcky ku konštrukcii. S klasickými metódami k riešeniu môžeme dospieť so zostrojením niekoľkých špeciálnych prípadov. Pomocou softvéru však po správnej konštrukcií sme schopní vykresliť aj stopu ortocentra, ak bod *C* prebehne celú kružnicu.

Vo všetkých troch prípadoch (predtest - posttest) väčšina (~ 84%) správne vylúčila, že hľadané geometrické miesto nebude lineárny útvar. Úspešnosť v experimentálnej skupine bola v tomto prípade vyššia, než v druhej skupine a pri predteste, čo vyhovuje hypotéze experimentu. V kontrolnej skupine nepomohli ani rysovacie pomôcky, ale v experimentálnej skupine počas vypĺňovania posttestu sme postrehli, že až dvom sa študentom podarilo pomocou programu uvedenú stopu ortocentra vykresliť, teda vybrali úplne oprávnene odpoveď **c)**. To môžeme považovať za úspech nášho pôsobenia.

4. úloha

V úlohe očividne bolo treba zostaviť plán, postup riešenia. Ak sa študentom podarilo tento plán zostaviť, potom už nebolo ťažké vybrať odpoveď, ktorá obsahuje k riešeniu potrebne nástroje.

Opísanú kružnicu k trojuholníku s daným polomerom *R* vieme zostrojiť (**kružnica**), dokonca na tejto kružnici vieme vyznačiť aj body *B* a *C* – ich vzdialenosť je *a* (**kružnica**). Danú výšku na stranu *b* vieme do konštrukcie vložiť tým, že zostrojíme kružnicu so stredom v bode B a polomerom v_b a hľadáme k tejto kružnici dotyčnicu z bodu C (**kružnica** a **Tálesová kružnica**). K zostrojeniu Tálesovej kružnice však potrebujeme ešte stred úsečky BC, čo zostrojíme pomocou osi úsečky.

Úloha je pomerne rýchlo skonštruovateľná pomocou počítača. Študenti experimentálnej skupiny aj v tomto prípade chceli zostrojiť trojuholník– nestačil im myšlienkový pokus, abstraktné zostavenie plánu, ale museli vymyslený postup aj overiť s realizáciou konštrukcie. Úspešnosť aj v tomto prípade bola vyššia v experimentálnej skupine, než v druhej skupine a pri predteste, čo vyhovoval pracovnej hypotéze experimentu. Takisto, ako aj prechádzajúcom prípade vzhľadom na malú vzorku výskumu to nemôžeme považovať za signifikantnú. Upozorňujú na to aj prvé dva príklady, kde sme v experimentálnej skupine dosiahli nižšiu úspešnosť pri opakovanom postteste ako pri úvodnom teste.

ZHRNUTIE EXPERIMENTU

Síce výskum bol realizovaný na škole, ktorá vyniká úspešnosťou svojich študentov na matematických olympiádach, ale nami vybraná trieda nebola špecializovaná na matematiku. Podľa triedneho učiteľa a učiteľa matematiky bola to trieda so študentmi s priemernými schopnosťami a vedomosťami z matematiky.

Seminár, v rámci ktorého bol experiment realizovaný, slúžil na opakovanie učiva a prípravu na maturitnú skúšku. Vedomostné nedostatky zistené počas experimentálneho vyučovania sme sa snažili nahradiť a doplniť. Ako sme to zistili pozorovaním, ale čiastočne na to poukázali aj niektoré chyby v odpovediach testu, študenti dosť veľa zo svojich znalostí už zabudli, resp. chýbali im predpokladané vedomosti napr. ani jeden zo študentov už nespomínal na Euklidove vety. Snažili sme sa vytvoriť v študentoch globálny myšlienkovo - procesový charakter matematiky, napr. ukázali sme, že nie je až také zlé, ak nevieme z pamäti vzťah medzi obsahom, obvodom a polomerom vpísanej kružnice trojuholníka – oveľa horšie je, ak nevieme to ani odvodiť. Veríme, že nami realizované opakovanie učiva konštrukčnej časti geometrie bolo aspoň také dobré, ako keby by sme si to prebrali podľa klasickej metodológie.

Tematické okruhy, s ktorými sme sa zaoberali, už neboli pre študentov nové, teoreticky stretli sa s nimi v nižších ročníkoch; len veľmi malú čiastku učiva tvorili „neznáme“ oblasti, ako napr. kužeľosečky. Vo všeobecnosti aj tieto boli len nezvyčajné, iné pohľady (s kužeľosečkami sa už stretli, avšak len z pohľadu analytickej geometrie, my sme im predviedli aj syntetické, metrické definície).

Pri výbere tematiky a jednotlivých príkladov sme dbali na to, aby používanie počítača a programu nebolo samoúčelné, aby v danom príklade naozaj mala počítačom podporovaná metóda nejakú výhodu oproti klasickej metóde vyučovania. Pritom sme museli naučiť žiakov ovládať program, ale snažili sme sa tomu venovať len toľko času, koľko bolo nevyhnutné k úspešnej práci.

Ako vidno aj z dokumentácie výskumu, jednotlivým príkladom sme venovali dlhší čas: naším cieľom nebolo rýchlo prebehnúť cez prichystanú zbierku príkladov, chceli sme skôr to, aby študenti získali nadhľad v geometrii a aby našli riešenie samostatne, exploratívne (motivácia s pocitom úspechu). Časová dotácia dovolila pomalšie postupovanie v učive a preto sme sa mohli držať k zásade, aby sme študentom nevnucovali riešenia. K tomuto javu čiastkovo pripočítalo sa samozrejme aj skutočnosť, že u niektorých študentov objavili sa ťažkosti v ovládaní programu aj po niekoľkých stretnutiach. Tento fakt nevedeli sme úplne eliminovať, ale myslíme si, že keby poznali študenti použitý program už dávnejšie (napr. používali by to bežne už od prvého ročníka), tak by sa situácia výrazne zlepšila.

Naše skúsenosti získané z pozorovania a z testov ako výsledky tohto výskumného projektu zhrnieme v nasledujúcich bodoch:

- U študentov takéto vyučovanie vzbudil záujem o experimentovanie a objavovanie v oblasti geometrie. Myslíme si, že takou formou poznania študenti lepšie pochopia aj hlbšie súvislosti geometrie a získajú aj plnohodnotnejšie, komplexnejšie a trvácnejšie vedomosti. Takáto forma umožňuje učenia sa pomocou tvorivej práce a takto získané vedomosti budú oveľa aktívnejšie, pričom dá sa predpokladať, že zvýši sa aj efektivita pri riešení úloh a praktických problémov.

- U študentov sme zistili niekoľkokrát problém takého charakteru, že už mali hotový nápad alebo plán riešenia, len to nevedeli v prostredí programu prakticky realizovať. To však neznamená, že im chýbali nejaké ovládateľské poznatky. Všetky k tomu potrebné vedomosti týkajúce sa tak geometrie ako ovládania programu mali k dispozícii, len ich nevedeli štrukturálne pospájať.
- V niektorých oblastiach myšlienkový proces žiakov bol úplne odlišný, ako sme to očakávali. Najvýraznejšou takou oblasťou bolo riešiteľnosť konštrukčných úloh. Tu sme zistili, že študenti s priemernými vedomosťami a schopnosťami v geometrii vedeli používať len dobre známe, precvičované a zafixované postupy. Museli sme skonštatovať, že vo všeobecnosti študenti nie sú otvorení na riešenie úloh a problémov heuristickým spôsobom. O tom svedčí aj neúspešnosť posttestu v experimentálnej skupine v príklade 2. Študenti za každú cenu chceli trojuholník zostrojiť a potom vyšetriť skonštruovateľnosť trojuholníka. Samozrejme, ak sa im nepodarila konštrukcia, tak nedostali sa ani k diskusii.

Napriek všetkým uvedeným ťažkostiam študenti nás niekoľkokrát príjemne prekvapili svojimi nápadmi, napr. ako overiť pomocou programu, že ťažisko rozdeľuje ťažnice v pomere 1 : 2 (2. stretnutie). Vyskúšali sme, ako by sa dali nové poznatky sprostredkovať cez interaktívne médium vo forme dialógu medzi učiteľom a študentmi (3. stretnutie) a organizovať skupinovú prácu študentov s viacerými príkladmi (4. stretnutie), čo by sme mohli použiť v triede na vnútornú diferenciáciu. Efekt a výsledky týchto hodín nezaostávali za klasicky organizovanými hodinami, pritom väčšinu práce (aj manuálnu, s čim vedomosti zafixujú sa) museli realizovať študenti sami.

Veľká výhoda takéhoto vyučovania bola, že vyučujúci videl, v akom štádiu riešenia úlohy sa nachádzajú jednotliví žiaci, a mohol im primerane pomôcť. To ale od učiteľa žiada na hodine neustálu pozornosť, široký teoretický rozhľad a praktický zmysel; pričom aj príprava na hodinu je náročnejšia.

ZÁVER

„Deti sa učia tým, že sa pokúsia niečo robiť, spravia chybu a dozvedia sa o chybe, alebo napodobujú nejakú činnosť, ktorá vedie k lepším výsledkom. Tento pohľad jasne naznačuje, že deti dávajú prednosť robiť niečo pred samotným prijímaním nových faktov. Inými slovami, učia sa tvorivou prácou (learning by doing).“
Roger C. Schank *(Northwestern University, New Jersey): Engines for Educators, 1995*

Predložená dizertačná práca sa zaoberá používaním počítačovej grafiky, kognitívnych technológií vo vyučovaní geometrie na základných a stredných školách v oblasti planimetrických konštrukčných úloh.

Práca bola koncipovaná tak, aby sme poukázali na výhody tejto alternatívnej metódy vyučovania, aby sme uviedli oblasti, prípravu a metodiku jej aplikácie, ale nezamlčali sme ani nevýhody a ťažkosti, ktoré sa nastávajú počas použitia týchto metód.

Počas realizácie výskumných projektov sme došli k takému záveru, že situácia v tejto oblasti nie je taká jednoznačná a jednoduchá ako sa to zdá na prvý pohľad. Problém spočíva pravdepodobne v tom, že u žiakov, resp. študentov sa ešte nevytvoril taký globálny nadhľad geometrie, s akým pracuje a predpokladá aj u žiakov či študentov učiteľ.

V nasledujúcich bodoch zhrnieme získané skúsenosti:

- Motivácia – ukázalo sa, že hlavne mladšia generácia sa vrelo zaujíma o geometriu na počítači. V rámci svojich výskumných projektov sme postrehli, že chlapci mali o „počítačové vyučovanie“ väčší záujem, avšak vzhľadom na malú početnosť vzoriek nemôžeme tento rozdiel považovať za signifikantnú.

- Časová náročnosť – čas venovaný naučeniu ovládania konkrétnych programov je len jedna zložka. Ani samotná objaviteľská, experimentálna či realizačná práca v prostredí použitých programov neskracovala čas výrazne s porovnaním klasických metód. Upredností̌ovali sme totiž pri práci v plnej miere interaktívne konštrukcie a zaručenie interaktivity nebolo vždy jednoduché. Myslíme si však, že takto získané hlbšie vedomosti a skúsenosti žiakov a študentov nás môžu ospravedlniť za stratu času.

- Diskusia konštrukčných úloh – v tejto oblasti sme očakávali najvýraznejšie výhody aplikácie uvedených programov. Ukázalo však, že len samotné používanie geometrických programov úspešnosť značne nezlepší. Musíme popri používaniu geometrických programu naučiť žiakov a študentov aj tak uvažovať, aby vedeli túto potenciálne danú výhodu programov aj využiť.

- Overovanie hypotéz – sme realizovali vždy v riadenej forme. Žiaci – študenti dostali zadanie a keď to bolo potrebné aj návod k problému. Na základe toho vyslovili a pomocou počítača aj overili hypotézu, pričom riadili sme ich vhodnými otázkami. Na základe skúseností myslíme, že takéto overovanie treba vypracovať postupne a v malých krokoch. U študentov gymnázia sme zistili aj to, že takéto overovanie nepopletú s exaktným matematickým dôkazom.

Vyučovanie realizované pomocou uvedených softvérov môžeme len podporovať, samozrejme, so zohľadnením didaktických pripomienok. Myslíme si, že takýmito programami môžeme pomáhať žiakovi, resp. študentovi s vlastným experimentovaním objaviť hlbšie súvislosti geometrie; vo vytváraní predstáv geometrických situácií, úloh, či viet a dáme im do rúk veľmi prospešný nástroj, ktorý však bez vedomostí je necenný. Pri práci však musíme dodržať niekoľko zásad, ako napr.:

- **Používať počítačové modelovanie len v tom prípade, keď ich použitie je opodstatnené**; nepoužívať ich len preto, aby sme ich použili – ak vieme danú úlohu efektívnejšie riešiť iným spôsobom, tak máme to realizovať s tým.
- **Nechajme žiakov, resp. študentov objavovať, pracovať sám.** Majú pred sebou dokonalý nástroj, nezapleťme sa do toho kým to nie je nutné.

- **Nezabudnime, že naďalej vyučujeme geometriu!** K úspešnej práci, samozrejme, patria aj postačujúce ovládacie spôsobilosti používateľa (ako učiteľa, tak aj žiaka/študenta – len na rôznych úrovniach) daného softvérového produktu. Ale nemali by sme venovať väčšiu pozornosť programu, než to zaslúži – nemáme žiakov naučiť perfektne ovládať program, ale geometriu!

Keď sa nám podarí počas vyučovania zabezpečiť dodržanie uvedených zásad, pričom máme k dispozícií aj potrebné materiálové a organizačné podmienky, teoreticky máme možnosť na to, aby žiaci /študenti čo najoptimálnejšie rástli vo svojich vedomostiach.

ZOZNAM LITERATÚRY

Odborná literatúra z matematiky, didaktiky matematiky a z oblasti pedagogického výskumu

[1] Colerus, E.: *Od násobilky po integrál*. Bratislava, Slovenské vydavateľstvo technickej literatúry, 1965,

[2] Colerus, E.: *Pythagorastól Hilbertig*. Budapest, Franklin-társulat,

[3] Coxeter, H.S.M.: *A geometriák alapjai*. Budapest, Gondolat, 1986,

[4] Coxeter, H.S.M.: *Projektív geometria*. Budapest, Gondolat, 1986,

[5] Csiba P. – Kmeťová M.: *Veta o troch dotyčniciach paraboly z pohľadu projektívnej a afinnej geometrie,* Obzory matematiky, fyziky a informatiky 1/2001

[6] Fulier, J - Šedivý, O.: *Motivácia a tvorivosť vo vyučovaní matematiky*. Nitra, Edícia Prírodovedec, 2001, ISBN 80-8050-445-8

[7] Gavora, P.: *Výskumné metódy v pedagogike*. Bratislava, Univerzita Komenského, 1997, ISBN 80-223-1173-1

[8] Hajós, Gy.: *Bevezetés a geometriába.* Budapest, Nemzeti Tankönyvkiadó, 1995, ISBN 963-18-6771-4

[9] Hejný, M. a kol.: *Geometria 1*. Bratislava, Slovenské Pedagogické Nakladateľstvo, 1985,

[10] Hejný, M. a kol.: *Teoria vyučovania matematiky 2*. Bratislava, Slovenské Pedagogické Nakladateľstvo, 1990, ISBN 80-08-01344-3

[11] Hejný, M. – Kuřina, F.: *Dítě, škola a matematika: konštruktivistické přístupy k vyučovaní*. Praha, Portál, 2001, ISBN 80-7178-581-4

[12] Hejný, M. – Michalcová, A.: *Skúmanie matematického riešiteľského postupu,* Bratislava, Metodický centrum v Bratislave, 2001, ISBN 80-8052-085-2

[13] Kimberling, C.: *Triangel centers and central trangels*. Winnipeg, The ISSN for Congress Numerantium is 0384-9864, Volume129, 1998,

[14] Kuřina, F.: *Umění videt v matematice*. Praha, SPN, 1990, ISBN 80-04-23753-3

[15] Larson, L.C.: *Metódy riešenia matematických problémov.* Bratislava, ALFA, 1990, ISBN 80-05-00627-6

[16] Pelikán, J.: *Základy empirického výzkumu pedagogických javů.* Praha, Karolinum, 1998, ISBN 80-7184-569-8

[17] Piják, V.: *Konštrukčná geometria.* Bratislava, Slovenské Pedagogické Nakladateľstvo, 1985,

[18] Pólya, G.: *Mathemathical discovery, vol.1-2.* John Wiley, New York – London, 1962

[19] Pólya, Gy.: *A gondolkodás iskolája.* Budapest, Gondolat, 1977,

[20] Solčan, Š.: *Projektívna geometria.* Bratislava, UK, 1995, ISBN 80-223-0887-0

[21] Šedivý, O. a kol. *Geometria 2.* Bratislava, Slovenské Pedagogické Nakladateľstvo, 1987.

[22] Thiele, R.: *Matematické důkazy.* (český preklad *Mathematische Beweise*, BSB Leipzig 1979) SNTL, 1985

[23] Turek I.: *Učiteľ a pedagogický výskum*. Bratislava. Metodický centrum v Bratislave. 1998

[24] Turek, I.: *O problémovom vyučovaní,* Bratislava, Slovenské Pedagogické Nakladateľstvo, 1982,

[25] Turek, I.: *Učiteľ a didaktické testy.* Bratislava. Metodický centrum v Bratislave. 1996,

[26] Vallo, D.: *Bod a trojuholník.* Obzory matematiky a fyziky 3/2001, Proton, ISSN 1335-4981

Odborná literatúra z oblasti využitia počítača vo vyučovaní matematiky

[27] Csiba, P.: *A háromszögek Fermat- és Napóleon-féle pontjaik általánosítása,* Polygon XI./2., Szeged, 2002, ISSN 1215-3044

[28] Csiba, P., - Vallo, D.: *Riešenie jedného geometrického problému kružnicovou inverziou.* Zborník 2. vedeckej konferencie doktorandov, 2000/2001, FPV UKF v Nitre

[29] Csiba, P. – Vallo, D.: *Interaktívne geometrické softvéry.* Acta Didactica 5, FPV UKF v Nitre, 2002. ISBN 80-80-50-524-1

[30] Csiba, P. – Vallo, D. – Grausová, M.: *Program EUKLIDES vo vyučovaní geometrie.* Zborník konferencie: Matematika vo výučbe, výskume a praxi, Nitra, SPU, 2002, ISBN 80-8069-040-5, str. 245-9,

[31] Csiba, P. – Vallo, D.: *Geometrický softvér EUKLIDES*. Zborník konferencie: 1.

medzinárodná konferencia Aplimat, STU, 2002, ISBN 80-227-1654-5, str. 121-5,

[32] Csiba, P. – Vallo, D.: *Kužeľosečky pomocou programu Euklides*. Zborník konferencie: Nové trendy vo vyučovaní matematiky. Nitra: SPU. 2001,

[33] Csiba, P. – Vallo, D.: *Program EUKLIDES – verzia 2.4*. Zborník III. vedeckej konferencie doktorandov. Nitra: FPV UKF, 2001. ISBN 80-8050-501-2

[34] Csiba, P.: *Hľadanie, overovanie a dôkaz novej hypotézy o trojuholníkoch*. Zborník III. vedeckej konferencie doktorandov. Nitra: FPV UKF, 2001. ISBN 80-8050-501-2

[35] Csiba, P.: *Overenie geometrických hypotéz pomocou počítača*. Zborník II. vedeckej konferencie doktorandov. Nitra: FPV UKF, 2001. ISBN 80-8050-386-9

[36] Černochová, M. - Komrska, T. – Novák, J.: *Využití počítače pri vyučovaní.* Praha: Portál, 1998. ISBN 80-7178-272-6

[37] Jodas, V.: *O potrebe novej vízie vo vyučovaní matematiky*. Obzory matematiky, fyziky a informatiky, 2/2001, Proton, ISSN 1335-4981

[38] Kabelka, K. – Leischer, P.: *Soubor interaktivních obrázku v Cabri Geometrii pro výuku stereometrie*, České Budejovice, Department of Mathematics Report Series, Vol. 8, 2000. ISBN 80-7040-468-X

[39] Lávička, M.: *CabriJava*, MFI, Vol. 10, No. 5, 2000, ISSN 1210-1761

[40] Slavík, J. – Novák, J.: *Počítač jako pomocník učitele.* Praha: Portál, 1997.

[41] Suchý, O. - Vrba, A.: *Náměty k využití Cabri Géometre II* - diplomová práce. Praha, KMDM PedF UK, 1997,

[42] Vaníček, J.: *Dynamická geometrie: analýza chyb v žákovské konstrukci*, Sborník konference ICTE 2001, Rožnov pod Radhoštěm, 18.-21. 9. 2001

[43] Vaníček, J.: *Experience of the preparation of mathematics teacher students with CAL of construktive geometry.* Škola a učiteľ v treťom tisícročí, zborník č. 1 konferencie MEDACTA99, Nitra: Slovdidac, 1999, ISBN 80-967746-2-X, str. 144-8

[44] Vaníček, J.: *Geometrie na počítači: množiny bodů*, MFI Vol. 10 No. 9-10, Praha, 2000, ISSN 1210-1761, str. 562-5, 619-22

[45] Vaníček, J.: *Geometrie na počítači*: mřížové body, MFI, roč. 11 (2002),

[46] Vaniček, J.: *Internetové prostředí pro tvorbu interaktivních učebnic dynamické geometrie*. Sborník konference ICTE 2000, Rožnov pod Radhoštěm, Ostrava, Univerzita Ostrava, 2000, ISBN 80-7042-795-7, str. 177-81

[47] Vaníček, J.: *Počítačem podporovaná výuka geometrie* – disertačná práca. PedF UK, 2001,

[48] Vrba, A.: *Oživlá geometrie*, MFI, roč. 10 (2001), č. 2 a 3; ISSN 1210-1761

[49] http://www.mathsnet.net

[50] http://www.sulinet.hu

[51] http://omicron.felk.cvut.cz/~bobr

Učebnice pre ZŠ a SŠ

[52] Hecht, T. a kol.: *Matematika pre 1. ročník gymnázií a SOŠ, 3. zošit : Planimetria.* Bratislava, Orbis Pictus Istropolitana,1996,

[53] Hecht, T. a kol.: *Matematika pre 1. ročník gymnázií a SOŠ, 5. zošit: Zbierka úloh.* Bratislava, Orbis Pictus Istropolitana,1996,

[54] Hecht, T. a kol.: *Matematika pre 2. ročník gymnázií a SOŠ, 2. Geometrické zobrazovania* Bratislava, Orbis Pictus Istropolitana,1997,

[55] Hecht, T. a kol.: *Matematika pre 2. ročník gymnázií a SOŠ, 3. Stereometria.* Bratislava, Orbis Pictus Istropolitana,1998,

[56] Hecht, T. a kol.: *Matematika pre 2. ročník gymnázií a SOŠ, 4. Zbierka úloh.* Bratislava, Orbis Pictus Istropolitana,1996

[57] Hecht, T. a kol.: *Matematika pre 3. Ročník gymnázií a SOŠ, 3. zošit :Analytická geometria.* Bratislava, Orbis Pictus Istropolitana,1999,

[58] Hecht, T. a kol.: *Matematika pre 3. Ročník gymnázií a SOŠ, 4. Stereometria II.* Bratislava, Orbis Pictus Istropolitana,1999,

[59] Hecht, T. a kol.: *Matematika pre 3. ročník gymnázií a SOŠ, 5. Zbierka úloh.* Bratislava, Orbis Pictus Istropolitana,1996,

[60] Šedivý, O. – Čeretková, S. – Malperová, M. – Bálint, Ľ.: *Matematika pre 5. ročník základných škôl, 1. – 2. časť*. Bratislava, SPN, 2001,

[61] Šedivý, O. – Čeretková, S. – Malperová, M. – Bálint, Ľ.: *Matematika pre 6. ročník základných škôl, 1. – 2. časť*. Bratislava, SPN, 2001,

[62] Šedivý, O. – Čeretková, S. – Malperová, M. – Bálint, Ľ.: *Matematika pre 7. ročník základných škôl, 1. – 2. časť*. Bratislava, SPN, 2001,

[63] Šedivý, O. – Čeretková, S. – Malperová, M. – Bálint, Ľ.: *Matematika pre 8. ročník*

základných škôl, 1. – 2. časť. Bratislava, SPN, 2001,

Učebné osnovy a štandardy pre ZŠ a SŠ

[64] Učebné osnovy gymnázia, MATEMATIKA, štvorročné štúdium, Schválilo Ministerstvo školstva Slovenskej republiky 24. 2. 1997 pod číslom 1252/96-15 s platnosťou od 1. 9. 1997

[65] Učebné osnovy Matematiky pre 5. – 9. ročník základných škôl, Schválilo Ministerstvo školstva Slovenskej republiky 3. 4. 1997 pod číslom 1640/1997-151 s platnosťou od 1. 9. 1997

Obsah